আধুনিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি

সুকুমার রায়চৌধুরী ও বীরেশ সরকার

Recommended by the West Bengal Board of Secondary Edcaution, as a Textbook on Geometry, Mensuration and Trigonometry for class X for all Schools of West Bengal and Tripura. [Vide Notification No. 76/10/M/13 dated 31.12.76 and also Boards letter No. RB/76/DS/1]

আধুনিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি

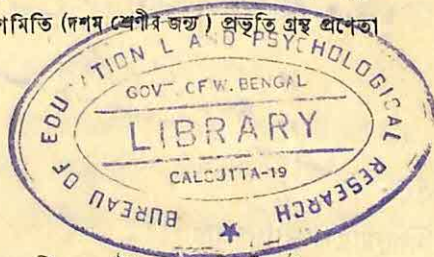
(দশম শ্রেণীর জন্য)

সুকুমার রায়চৌধুরী

গণিতশাস্ত্রের অধ্যাপক, সুরেন্দ্রনাথ কলেজ, কলিকাতা; ভূতপূর্ব গণিতশাস্ত্রের অধ্যাপক, সেণ্ট্ জেভিয়ার্স্ কলেজ, কলিকাতা; বি. এস্-সি. "Elementary Analytical Geometry and Vector Analysis"; প্রি-য়ুনিভার্সিটি "Elementary Co-ordinate and Solid Geometry"; আধুনিক জ্যামিতি ও পরিমিতি (নবম শ্রেণীর জন্য), আধুনিক বীজগণিত ও পাটীগণিত (নবম শ্রেণীর জন্য); আধুনিক বীজগণিত ও পাটীগণিত (দশম শ্রেণীর জন্য) প্রভৃতি গ্রন্থ-প্রণেতা

ও

বীরেশ সরকার

শিক্ষক, শৈলেন্দ্র সরকার বিদ্যালয় (সরস্বতী ইন্‌স্টিটিউসন্), কলিকাতা; ভূতপূর্ব শিক্ষক, হাওড়া অক্ষয় শিক্ষায়তন (রিপন কলেজিয়েট্ স্কুল), আধুনিক জ্যামিতি ও পরিমিতি (নবম শ্রেণীর জন্য); আধুনিক বীজগণিত ও পাটীগণিত (নবম শ্রেণীর জন্য); আধুনিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি (দশম শ্রেণীর জন্য) প্রভৃতি গ্রন্থ প্রণেতা

মডার্ণ বুক এজেন্সী প্রাইভেট লিমিটেড

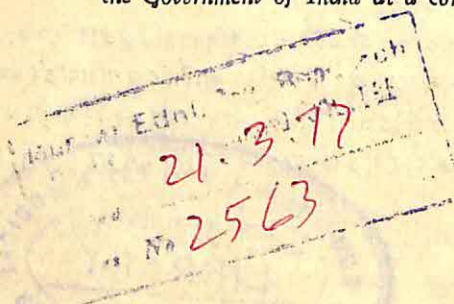
10, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট,

কলিকাতা-700073

প্রকাশক :
শ্রীদীনেশচন্দ্র বসু
মডার্ণ বুক এজেন্সী প্রাইভেট লিঃ
10, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট,
কলিকাতা-700073

প্রথম প্রকাশ : ডিসেম্বর, 1974
দ্বিতীয় সংস্করণ : এপ্রিল, 1976
সংশোধিত সংস্করণ : ডিসেম্বর, 1976

প্রধানমন্ত্রী নির্দেশিত ২০ দফা কর্মসূচী রূপায়ণে
হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য : ৪ টাকা ২৮ পয়সা মাত্র

[Paper used for printing this book was made available by the Government of India at a concessional rate]

মুদ্রাকর :
শ্রীঅনিলকুমার বন্দ্যোপাধ্যায়
শঙ্কর প্রিণ্টার্স
27/3বি, হরি ঘোষ স্ট্রীট্‌,
কলিকাতা-6

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক নির্ধারিত নূতন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী দশম শ্রেণীর জন্য এই পুস্তকটি প্রণীত হইল। যাহাতে ছাত্র-ছাত্রীদের নিকট বিষয়গুলি সহজবোধ্য হয়, অথচ যুক্তির কোথাও ব্যাঘাত না ঘটে,—পুস্তক প্রণয়নে আমরা তাহার প্রতি বিশেষ লক্ষ্য রাখিয়াছি। নূতন পাঠ্যক্রম অনুযায়ী নবম শ্রেণীর পাঠ্যবস্তুর সংক্ষেপ অথচ সম্পূর্ণ আলোচনা দেওয়া হইয়াছে যাহাতে যুক্তিগুলির ধারাবাহিকতা ও ক্রমবিন্যাস অটুট থাকে। মূল বক্তব্য যাহাতে সহজবোধ্য হয়, অধ্যায়-বিন্যাসে তাহার প্রতি লক্ষ্য রাখা হইয়াছে। প্রতিটি অধ্যায়ে উদাহরণ ও অনুশীলনী এইভাবে সন্নিবেশিত হইয়াছে, যাহাতে পাঠ্যবস্তুর বিষয়গুলি আয়ত্ত করিতে বিশেষ সহায়ক হয়।

চতুর্থ অধ্যায়ে রূপান্তর জ্যামিতির (Transformation Geometry) সাহায্যে সামতলিক আকৃতির সাদৃশ্য আলোচনা করা হইয়াছে। নূতন পাঠ্যসূচীতে ষষ্ঠ, সপ্তম, অষ্টম ও দশম শ্রেণীর জ্যামিতির অংশবিশেষ হিসাবে ইহা অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে। যদিও ইহার পঠন-পাঠনে বিভিন্ন আধুনিক পদ্ধতি, সংজ্ঞা ও সাংকেতিক চিহ্ন ব্যবহৃত হওয়া বাঞ্ছনীয়—বর্তমান বৎসরের ছাত্র-ছাত্রীদের এই ব্যাপারে সম্যক্ জ্ঞান না থাকার সম্ভাবনা চিন্তা করিয়া আমরা এই অধ্যায়টি বিশেষ যত্নসহকারে প্রচলিত পদ্ধতিতে আলোচনা করিয়াছি। এই প্রক্রিয়ায় আমরা বিশেষ লক্ষ্য রাখিয়াছি যাহাতে যুক্তিগুলি অব্যাহত থাকে অথচ পাঠ্যক্রম সহজবোধ্য হয়।

ছাত্র-ছাত্রী ও শিক্ষকসমাজে বইটি সমাদৃত হইলেই আমরা আমাদের শ্রম সার্থক বলিয়া মনে করিব।

বিনীত

পঁচিশে ডিসেম্বর, 1974 — **গ্রন্থকারদ্বয়**

দ্বিতীয় সংস্করণ

ছাত্র-ছাত্রীদের নিকট যাহাতে এই পুস্তকটি আরও উপযোগী হয়, সে বিষয়ে দৃষ্টি রাখিয়াই এই নূতন সংস্করণে প্রবৃত্ত হইয়াছি। এই সংস্করণে নূতন সাংকেতিক চিহ্নাদির প্রয়োগ হইয়াছে। ইহার পরিশিষ্টে পৃথকভাবে **বিষয়মুখী প্রশ্নাবলী** (Objective Questions) সন্নিবেশিত হইয়াছে।

বিনীত

সাতই এপ্রিল, 1976 — **গ্রন্থকারদ্বয়**

ত্রিকোণমিতি ও উচ্চগণিতে নিম্নলিখিত গ্রীক্ অক্ষরগুলির বহুল প্রয়োগ হইয়া থাকে।

α—আল্‌ফা-(Alpha) ;
β—বিটা-(Bétā) ;
γ—গামা-(Gamma) ;
θ—থিটা-(Thetā) ;
π—পাই-(Pai) ;
ψ—সাই-(Psi) ;
ϕ—ফাই-(Phai) ;
Δ—বড় হাতের ডেল্‌টা (Capital Deltā).
σ—ডেল্‌টা-(Deltā) ;

জ্যামিতি অধ্যয়নে নিম্নলিখিত চিহ্নাদির প্রয়োগ হইয়া থাকে :—

$\overleftrightarrow{OA}$	OA এমন একটি সরলরেখা যাহার উভয় দিক অনির্দিষ্ট-ভাবে বর্ধিত হইয়াছে।
$\overrightarrow{OA}$	OA এমন একটি সরলরেখা, যাহার O একটি নির্দিষ্ট প্রান্তবিন্দু এবং ঐ সরলরেখাটি O হইতে A-র দিকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত হইয়াছে।
$\overline{OA}$	OA এমন একটি সরলরেখাংশ, যাহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে O এবং A. OA এখানে সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য।
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	$\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ সরলরেখাংশদ্বয় পরস্পর সর্বসম।
$\Delta OAB \cong \Delta O'A'B'$	OAB এবং O′A′B′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
$\angle OAB \cong \angle O'A'B'$	OAB এবং O′A′B′ কোণ দুইটি সর্বসম।
$\Delta OAB = \Delta O'A'B'$	OAB ও O′A′B′ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।
$\overset{\frown}{AB}$	AB চাপ।
$m\angle ABC$	ABC কোণের পরিমাপ। (যদি $m\angle ABC = 60^\circ$ এবং $m\angle DEF = 60^\circ$ হয়, তবে $\angle ABC \cong \angle DEF$.)

SYLLABUS FOR CLASS X

Geometry (30 marks)

1. Revision of Previous work.

2. To prove :

(a) There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line.

(b) A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord and conversely.

(c) The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of circumference.

(d) Angles in the same segment of a circle are congruent and if the line segment joining two points subtends congruent angles at two other points on same side of it, the four points lie on a circle.

(e) The angle in a semi circle is a right angle.

(f) The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

(g) (i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) The segment of two tangents of a circle from external point to the points of contact are congruent and they subtend congruent angles at the centre.

(iii) If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.

3. Simple idea of similarity—transformations through activity—their properties.

4. To prove :

(i) If a line is drawn parallel to one side of a triangle the other two sides are divided proportionally and the converse.

(ii) If two triangles are equiangular their corresponding sides are proportional and the converse.

(iii) If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

(iv) Pythagoras' theorem and its converse.

5. Constructions :

(i) To draw a circle about a triangle.
(ii) To draw a circle in a triangle.
(iii) To draw mean proportional.

Mensuration (10 marks)

1. Revision of previous work.

2. Surface and volume of a Rectangular parallelopiped, cylinder and sphere.

Trigonometry (15 marks)

1. Idea of trigonometrical angles.

2. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle, Trigonometrical ratios of the standard angles—0°, 30°, 45°, 60°, 90° (undefined values such as tan 90°, cot 0° to be excluded).

3. Trigonometrical ratios of complementary angles.

4. Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

———

সূচীপত্র

জ্যামিতি

পরিমিতি

ত্রিকোণমিতি

জ্যামিতি

(দশম শ্রেণী)

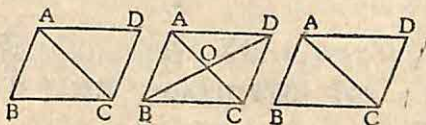
প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা (উপপাদ্য সম্বন্ধীয়) :

1.1. দশম শ্রেণীর পাঠ্যসূচী আলোচনায় ধারাবাহিকতা ও স্থান বিশেষে পূর্বপাঠের উল্লেখের সুবিধার জন্য নবম শ্রেণীর অধীত পাঠ্যবস্তুর প্রয়োজনীয় অংশগুলির সংক্ষিপ্ত আলোচনা নিম্নে প্রদত্ত হইল।

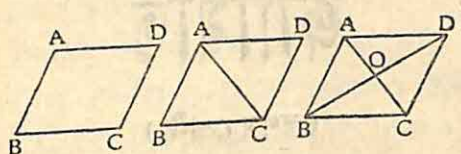
(1) সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি এবং বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সর্বসম এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে (চিত্র 1)।

(2) সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে (চিত্র 2)।

(3) কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সর্বসম হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক (চিত্র 3)।

চিত্র (1) চিত্র (2) চিত্র (3)

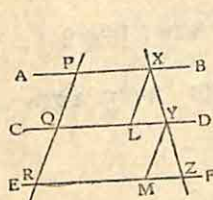
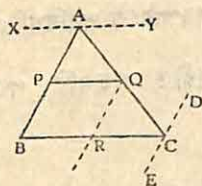
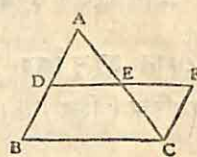
(4) কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সর্বসম হইলে, উহা একটি সামান্তরিক (চিত্র 4)।

(5) কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সর্বসম ও সমান্তরাল হইলে, উহা একটি সামান্তরিক (চিত্র 5)।

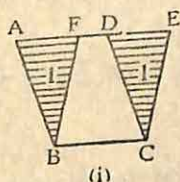
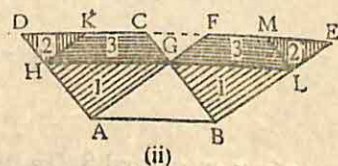
(6) যদি কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক (চিত্র 6)।

চিত্র (4) চিত্র (5) চিত্র (6)

(7) তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা কোন একটি ভেদক হইতে সর্বসম অংশসমূহ ছিন্ন করিলে, উহারা অপর যে কোন ভেদক হইতেও সর্বসম অংশসমূহ ছিন্ন করিবে (চিত্র 7)।

(8) ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অপর কোন বাহুর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টানিলে, উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং উক্ত সরলরেখা দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হয় (চিত্র 8)।

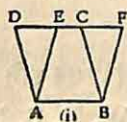
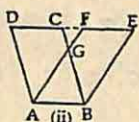
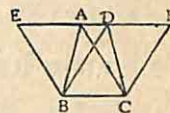
(9) কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং অর্ধেক (চিত্র 9)।

চিত্র (7) চিত্র (8) চিত্র (9)

(10) একই ভূমি ও একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে (বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট) অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান (চিত্র 10)।

[ব্যবহারিক পদ্ধতি]

চিত্র (i) (চিত্র 10) চিত্র (ii)

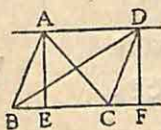
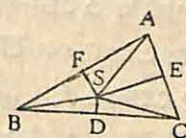
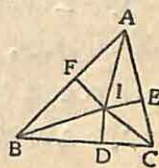
(11) একই ভূমি এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে (বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট) সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান (চিত্র 11)।

(12) যদি কোন ত্রিভুজ ও সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হয়, তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে (চিত্র 12)।

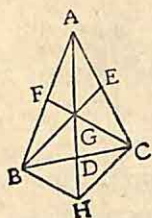
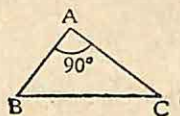
(13) যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমি (বা সমান সমান ভূমিবিশিষ্ট) এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে (বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট) অবস্থিত তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান (চিত্র 13)।

চিত্র (11) চিত্র (12) চিত্র (13)

(14) একই ভূমির উপর একই দিকে অবস্থিত সমান সমান (ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট) ত্রিভুজ একই সমান্তরালযুগলের মধ্যবর্তী হইবে (চিত্র 14)।

(15) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু (চিত্র 15)।

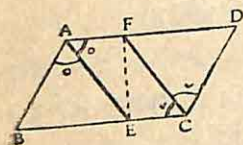
(16) ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু (চিত্র 16)।

চিত্র (14) চিত্র (15) চিত্র (16)

(17) ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু (চিত্র 17)।

(18) কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান (চিত্র 18)।

চিত্র (17) চিত্র (18)

বিবিধ উদাহরণ

(উপপাদ্য সম্বন্ধীয়)

উদা. 1. সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর সমান্তরাল। (W. B. S. F. 1967)

দেওয়া আছে : ABCD একটি সামান্তরিক। ∠A ও উহার বিপরীত ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে $\overline{BC}$-র E এবং $\overline{AD}$-র F-বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$.

অঙ্কন : EF যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ ABCD একটি সামান্তরিক। ∴ ∠A≅∠C;

∴ ∠EAF≅∠FCE [∵ ∠EAF $= \frac{1}{2}$ ∠A এবং ∠FCE $= \frac{1}{2}$ ∠C]

আবার, ∵ $\overline{AF} \parallel \overline{CE}$, $\overline{EF}$ উহাদের ভেদক,

∴ ∠AFE≅একান্তর ∠CEF.

এক্ষণে, △AFE ও △CEF-এর মধ্যে,

∠EAF≅∠FCE, ∠AFE≅∠CEF এবং $\overline{EF}$ সাধারণ,

∴ △AFE≅△CEF ; ∴ $\overline{AF} \cong \overline{CE}$;

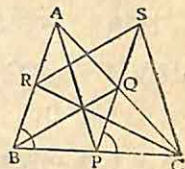
এক্ষণে, AECF চতুর্ভুজের $\overline{AF} \parallel \overline{CE}$ এবং $\overline{AF} \cong \overline{CE}$,

∴ AECF একটি সামান্তরিক। ∴ $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$.

উদা. 2. △ABC-র $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ যথাক্রমে P, Q এবং R-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। R-এর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{BQ}$-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা

টানা হইল এবং উহা $\overrightarrow{PQ}$-র সহিত S-বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, Δ CSR-এর বাহুগুলির সমষ্টি Δ ABC-র মধ্যমাগুলির সমষ্টির সমান।

(W. B. C. S. 1964)

দেওয়া আছে ঃ ABC একটি ত্রিভুজ। $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ ও $\overline{CR}$ যথাক্রমে উহার তিনটি মধ্যমা. R-বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{BQ}$-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা $\overrightarrow{PQ}$-র সহিত S-বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overline{CS}+\overline{SR}+\overline{RC}=\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}$.

প্রমাণ ঃ $\because$ Δ CAB-র $\overline{CB}$ ও $\overline{CA}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q,

$\therefore$ *$\overrightarrow{PQ} \| \overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}$; আবার, $\because$ R, $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু

$\therefore$ $\overline{BR}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\therefore$ $\overline{BR}=\overline{PQ}$.

এক্ষণে, $\because$ $\overrightarrow{PQ}$ বা $\overline{PS} \| \overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overline{BQ} \| \overline{RS}$ $\therefore$ BQSR একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $\overline{BQ} \cong \overline{SR}$ এবং $\overline{BR} \cong \overline{QS}$

$\because$ $\overline{BR} \cong \overline{PQ}$ এবং $\overline{BR} \cong \overline{QS}$, $\therefore$ $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$, $\therefore$ Q, $\overline{PS}$-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{PS}$ $\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{PS}$ [$\because$ $\overline{PQ} \cong \overline{BR}=\frac{1}{2}\overline{AB}$]

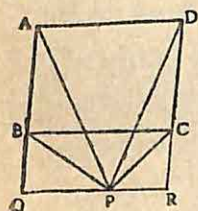
$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \| \overline{PS}$, $\overline{BC}$ উহাদের ভেদক, $\therefore$ $\angle$ ABP $\cong$ অনুরূপ $\angle$ SPC.

এক্ষণে, Δ ABP ও Δ SPC র মধ্যে,

$\overline{AB} \cong \overline{PS}$, $\overline{BP} \cong \overline{CP}$ [$\because$ P, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু], এবং $\angle$ ABP $\cong$ $\angle$ SPC ;

$\therefore$ Δ ABP $\cong$ Δ SPC, $\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{CS}$.

$\therefore$ $\overline{CS}+\overline{SR}+\overline{RC}=\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}$.

উদা. 3. ABCD সামান্তরিকের $\overline{BC}$-এর যে পার্শ্বে $\overline{AD}$ আছে, P উহার বিপরীত পার্শ্বে যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ PAB + Δ PBC + Δ PDC = Δ PAD.

দেওয়া আছে ঃ ABCD একটি সামান্তরিক। P, $\overline{BC}$-র যে পার্শ্বে $\overline{AD}$ আছে, উহার বিপরীত পার্শ্বস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ Δ PAB + Δ PBC + Δ PDC = Δ PAD.

---

* $\overrightarrow{PQ}$-কে Q-এর দিকে এবং $\overleftrightarrow{AB}$-কে উভয় দিকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত কেবলমাত্র দুই সরলরেখা বুঝাইতে ধরা হইয়াছে।

অঙ্কন : P-র মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{BC}$ অথবা $\overleftrightarrow{AD}$-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান। মনে কর, ঐ সরলরেখা $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$-কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, AQRD একটি সামান্তরিক। $\therefore$ $\Delta PAD = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক AQRD ; $\therefore$ $\Delta PAQ + \Delta PDR = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক AQRD.

$\therefore$ $\Delta PAQ + \Delta PDR = \Delta PAD$;

আবার, অঙ্কনানুসারে, BQRC-ও একটি সামান্তরিক ;

$\therefore$ $\Delta PBC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক BQRC ;

$\therefore$ $\Delta PBQ + \Delta PCR = \Delta PBC$.

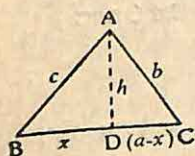
আবার, $\Delta PAQ = \Delta PAB + \Delta PBQ$ এবং $\Delta PDR = \Delta PDC + \Delta PCR$.

এক্ষণে, $\Delta PAQ + \Delta PDR = \Delta PAD$,

অর্থাৎ, $\Delta PAB + \Delta PBQ + \Delta PDC + \Delta PCR = \Delta PAD$;

$\therefore$ $\Delta PAB + \Delta PDC + \Delta PBQ + \Delta PCR = \Delta PAD$;

$\therefore$ $\Delta PAB + \Delta PBC + \Delta PDC = \Delta PAD$.

উদা. 4. ABC ত্রিভুজের a, b, c বাহুগুলি দেওয়া থাকিলে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ এবং $\overline{AB} = c$. A-বিন্দু হইতে $\overline{BC}$-র উপর $\overline{AD}$ লম্ব টান। মনে কর, $\overline{AD} = h =$ উচ্চতা, $\overline{BD} = x$ $\therefore$ $\overline{DC} = a - x$.

এক্ষণে, ADB সমকোণী ত্রিভুজে,

$h^2 + x^2 = c^2$ (পীথাগোরাসের উপপাদ্য হইতে)

বা, $h^2 = c^2 - x^2$.

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজে,

$h^2 + (a-x)^2 = b^2$; বা, $h^2 = b^2 - (a-x)^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

বা, $2ax = c^2 - b^2 + a^2$ $\therefore$ $x = \dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$

$\therefore$ $h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2$

$$=\left\{c+\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right\}\left\{c-\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right\}$$

$$=\left\{\frac{2ca+c^2-b^2+a^2}{2a}\right\}\left\{\frac{2ca-c^2+b^2-a^2}{2a}\right\}$$

$$=\left\{\frac{(c+a)^2-b^2}{2a}\right\}\left\{\frac{b^2-(c-a)^2}{2a}\right\}$$

$$=\left\{\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{2a}\right\}\left\{\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2a}\right\}$$

$$=\frac{(a+b+c)(c+a-b)}{2a}\cdot\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2a}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}$$

এক্ষণে, যদি $a+b+c=2s=$ ত্রিভুজের পরিসীমা ধরা হয়,

তবে, $h^2=\dfrac{(2s)(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4a^2}$

বা, $a^2h^2=\dfrac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4}=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

$\therefore\ ah=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \therefore\ \frac{1}{2}ah=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

কিন্তু, $\Delta\,\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}ah\quad\therefore\quad \Delta\,\mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

বিবিধ অনুশীলনী

1. কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে, উহার প্রত্যেক কোণই সমকোণ হইবে।

2. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1935)

3. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন সরলরেখা উহার বিপরীত বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, উহাও ঐ ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে এবং উহা সামান্তরিকটিকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করিবে। (C. U. 1926)

4. প্রমাণ কর যে, রম্বস একটি সামান্তরিক।

5. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ শীর্ষবিন্দু হইতে যে সরলরেখা অতিভুজের মধ্য-বিন্দু পর্যন্ত টানা যায়, উহা অতিভুজের অর্ধেক।

6. যে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখাত্রয় তিনটি সমান সামান্তরিক ও চারিটি সর্বসম ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

7. চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিলে, উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে এবং এই সামান্তরিকের পরিসীমা চতুর্ভুজটির কর্ণ দুইটির যোগফলের সমান।

8. একটি সরলরেখাকে সমান তিনটি অংশে কিভাবে বিভক্ত করা যায়, তাহা দেখাও। (W. B. S. F. 1969)

9. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর যে কোন সরলরেখা টানা যাউক না কেন, উহা ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (W. B. S. F. 1971)

10. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (W. B. S. F. 1970)

11. ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

12. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে উহার সমান বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির সমষ্টি ভূমির যে-কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান। (D. B. 1940)

13. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ΔAOB-র মধ্যে E যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,

$$\Delta CED = \Delta AEB + \Delta AEC + \Delta BED.$$

14. ABCD একটি সামান্তরিক ($\angle A < 90°$) এবং $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. P ও Q যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, AQ, BQ, DP, CP যুক্ত করিয়া যে ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হইল, উহা একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহা ABCD সামান্তরিকের এক-চতুর্থাংশ।

15. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় উহাদের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

16. ত্রিভুজের দুই কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক এবং তৃতীয় কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু। (C. U. 1940)

17. কোণ সুষম ষড়ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

18. ABC ত্রিভুজের $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ যথাক্রমে দুইটি মধ্যমা এবং G ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, AFGE চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = GBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

19. ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু।

20. PQRS চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\overline{PQ}^2 + \overline{RS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{QR}^2$.

21. Δ PQR-এর $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ এবং $\overline{PX}$ মধ্যমা। Y, $\overline{QX}$-এর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ}^2 = \overline{PY}^2 + 3\overline{QY}^2$.

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা (সম্পাদ্য সম্বন্ধীয়)

(1) কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে, যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে (চিত্র 1)।

(2) কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে (চিত্র 2)।

চিত্র (1) চিত্র (2)

বিবিধ অঙ্কন সম্বন্ধীয় প্রশ্নের সমাধান

1. ত্রিভুজের কোন বাহুর অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া দুইটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

দেওয়া আছে : Δ ABC-র $\overline{BC}$ বাহুর উপর P একটি বিন্দু।

অঙ্কন করিতে হইবে : P-র মধ্য দিয়া দুইটি সরলরেখা টানিয়া Δ ABC-কে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AP যোগ কর। $\overline{BC}$-কে E এবং F-বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত কর।

E ও F-বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AP}$-র সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরলরেখা টান। মনে কর, উহারা $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-কে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করে।

PG ও PH যোগ কর।

এক্ষণে, $\overline{PG}$ ও $\overline{PH}$-ই $\triangle ABC$-কে সমত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ : AE ও AF যোগ কর। $\because$ $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FC}$, $\therefore$ $\overline{AE}$ ও $\overline{AF}$ যথাক্রমে $\triangle ABF$ ও $\triangle AEC$-র মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle ABE=\triangle AEF=\triangle ACF=\frac{1}{3}\triangle ABC$;

এক্ষণে, $\triangle GEA=\triangle EGP$ [$\because$ উহারা একই ভূমি $\overline{EG}$ এবং একই সমান্তরালযুগল $\overleftrightarrow{EG}$ ও $\overleftrightarrow{AP}$-র মধ্যে অবস্থিত।]

অনুরূপে, $\triangle FHA=\triangle HFP$

আবার, $\triangle GBP=\triangle GBE+\triangle EGP$ এবং $\triangle ABE=\triangle GBE+\triangle GEA$;

কিন্তু, $\triangle GEA=\triangle EGP$, $\therefore$ $\triangle GBP=\triangle ABE=\frac{1}{3}\triangle ABC$;

অনুরূপে, $\triangle HCP=\triangle ACF=\frac{1}{3}\triangle ABC$,

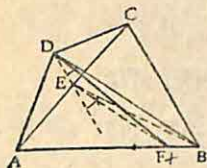
$\therefore$ AGPH চতুর্ভুজ $=\frac{1}{3}\triangle ABC$

$\therefore$ $\triangle GBP=$ চতুর্ভুজ AGPH $=\triangle HCP=\frac{1}{3}\triangle ABC$;

$\therefore$ PG ও PH, $\triangle ABC$-কে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

2. চতুর্ভুজের যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

দেওয়া আছে : ABCD একটি চতুর্ভুজ।

অঙ্কন করিতে হইবে : ABCD-র যে-কোন কৌণিক বিন্দু (ধর D) হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ABCD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AC ও BD যোগ কর। $\overline{AC}$-কে E-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। *$\overrightarrow{EF}\parallel\overleftrightarrow{BD}$ টান। মনে কর, $\overrightarrow{EF}$, $\overline{AB}$-র F-বিন্দুতে মিলিত হইল। DF যোগ কর।

এক্ষণে, $\overline{DF}$-ই, ABCD চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

*$\overrightarrow{EF}$-কে F-এর দিকে এবং $\overleftrightarrow{BD}$-কে উভয় দিকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত কেবলমাত্র দুইটি সরলরেখা বুঝাইতে ধরা হইয়াছে।

প্রমাণ : EB যোগ কর। এক্ষণে, $\triangle$DAC ও $\triangle$BAC-র মধ্যমা যথাক্রমে $\overline{DE}$ ও $\overline{BE}$ [$\because$ E, $\overline{AC}$-র মধ্যবিন্দু]।

$\therefore$ $\triangle DEA = \triangle DEC$ এবং $\triangle BEA = \triangle BEC$;

এক্ষণে, $\triangle DEA + \triangle BEA = \triangle DEC + \triangle BEC$

অর্থাৎ, চতুর্ভুজ ADEB = চতুর্ভুজ CDEB = $\frac{1}{2}$ × চতুর্ভুজ ABCD ;

আবার, $\triangle EFD = \triangle FEB$ [$\because$ উহারা একই ভূমি ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।]

এক্ষণে, চতুর্ভুজ ADEB = চতুর্ভুজ ADEF + $\triangle$FEB = চতুর্ভুজ ADEF + $\triangle$EFD = $\triangle$ADF = $\frac{1}{2}$ × চতুর্ভুজ ABCD ;

$\therefore$ চতুর্ভুজ DFBC = $\frac{1}{2}$ × চতুর্ভুজ ABCD ;

$\therefore$ DF, চতুর্ভুজ ABCD-কে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

বিবিধ অনুশীলনী

1. একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। [W. B. S. F. (Comp.) 1967]

2. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান। [W. B. S. F. '66, '69, '71]

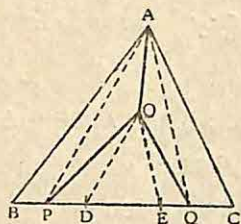
3. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর। [C. U. 1949]

4. একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান লইয়া এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান।

5. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান করিয়া এরূপ একটি সামান্তরিক আঁক, যাহার একটি বাহু ও একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। [C. U. 1944]

6. ত্রিভুজের যে কোন বাহুর অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

7. চতুর্ভুজের কোন একটি বাহুর উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। [C. U. 1949]

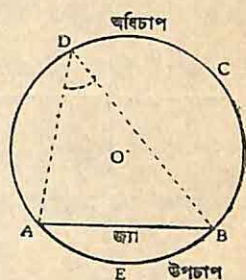
8. ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে তিনটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত কর।

9. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।

10. Δ ABC-র $\overline{BC}$ বাহুর যে পার্শ্বে A অবস্থিত সেই পার্শ্বে D একটি বিন্দু। এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যাহার ক্ষেত্রফল Δ ABC-র ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার শীর্ষবিন্দু হইবে D ও ভূমি $\overleftrightarrow{BC}$ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

বৃত্ত

2.1. বৃত্ত, ব্যাস, ব্যাসার্ধ ইত্যাদি সম্বন্ধে তোমরা পূর্বেই জানিয়াছ। এখানে বৃত্ত সম্বন্ধীয় বিবিধ উপপাদ্যের প্রমাণের নিমিত্ত কতিপয় প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা আলোচিত হইল।

যে কোন জ্যা বৃত্তকে দুইটি চাপে ভাগ করে। উহাদের মধ্যে বড় চাপটিকে বলে **অধিচাপ** (Major arc) এবং ছোটটিকে বলে **উপচাপ** (Minor arc)। এখানে, BCA অধিচাপ ও AEB উপচাপ।

জ্যা $\overline{AB}$, AEBC বৃত্তটিকে দুইটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। ঐ দুইটি অংশের প্রত্যেকটিকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলা হয়।

বৃত্তাংশস্থিত কোণ (Angle in a segment) : কোন বৃত্তাংশের চাপের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর সহিত জ্যা-এর প্রান্তবিন্দু দুইটি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাদ্বয় উক্ত বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, ঐ কোণকে **বৃত্তাংশস্থিত কোণ** বলে।

$\angle$ ADB, BCDA বৃত্তাংশস্থিত কোণ। (চিত্র দেখ)

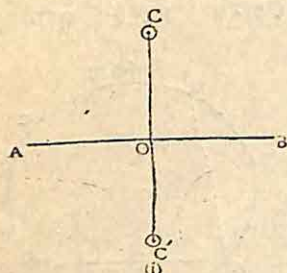
সমবৃত্ত (Concyclic) **বিন্দু** : যে সকল বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, ঐ বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্ত বিন্দু** বলা হয়।

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (Cyclic quadrilateral) : চতুর্ভুজের চারিটি কৌণিক বিন্দুর মধ্য দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কিত হইলে, ঐ চতুর্ভুজটিকে **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** বলে।

এককেন্দ্রীয় (Concentric) **বৃত্ত** : যদি একটিমাত্র বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একাধিক বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে ঐ সকল বৃত্তকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** বলা হয়।

পরিবৃত্ত (Circum-circle) : ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হয়, উহাকে ঐ ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** বলা হয়। AEBCD বৃত্তটি, ΔDAB-র পরিবৃত্ত। ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) ও ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলে। ঐ বৃত্তটিকে ঐ ত্রিভুজের **পরিলিখিত বৃত্ত** (Circumscribed circle) বলে।

প্রতিসাম্য (Symmetry)

2.2. প্রতিসাম্য রেখা (Line of Symmetry) : একটি সাদা কাগজে কালি দিয়া যে কোন একটি বিন্দু C আঁক এবং ঐ কালির দাগ শুকাইতে না শুকাইতেই কাগজটিকে যে কোন রেখা, $\overline{AB}$ বরাবর এমনভাবে ভাঁজ কর, যাহাতে $\overline{AB}$-র অপর পার্শ্বে ঐ কালির ছাপ পড়ে। মনে কর, উহা C′. এক্ষণে C′-ই হইবে C-র **প্রতিবিম্ব** এবং $\overleftrightarrow{AB}$ রেখা হইবে C ও C′ বিন্দুদ্বয়ের **প্রতিসাম্য রেখা**। ভাঁজ খুলিয়া কাগজটিতে অঙ্কিত C ও C′ বিন্দুদ্বয়কে যোগ করিলে, উহা $\overleftrightarrow{AB}$-কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, $\overline{OC} \cong \overline{OC}$ হইবে; অর্থাৎ প্রতিসাম্য রেখা হইতে বস্তুর দূরত্ব = প্রতিসাম্য রেখা হইতে প্রতিবিম্বের দূরত্ব। $\angle POB \cong \angle P'OB$ (চিত্র ii) ; অর্থাৎ, কোন কোণ ও উহার প্রতিবিম্ব-কোণ সর্বসম। এখানে, P′, P-এর প্রতিবিম্ব ও $\overleftrightarrow{AB}$ প্রতিসাম্য রেখা।

(i)

কোন জ্যামিতিক চিত্রের **প্রতিসাম্য অক্ষের** (Axis of Symmetry) উভয় পার্শ্বস্থ অংশদ্বয় প্রতিসম (Symmetrical)। কোন বৃত্তে অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা হইতে পারে। বৃত্তের প্রতিসাম্য রেখাগুলিই ঐ বৃত্তের ব্যাস। বৃত্ত উহার কেন্দ্রের চারিদিকে প্রতিসম।

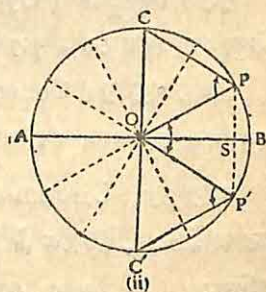
প্রতিসাম্য সম্পর্কিত দুইটি উপপাদ্য :

(1) কোন বৃত্ত উহার যে কোন ব্যাসের উভয় দিকে প্রতিসম।

দেওয়া আছে : ACBC′ বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাস $\overline{AB}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : এই বৃত্তটির $\overline{AB}$ ব্যাসের উভয় পার্শ্বস্থ অংশদ্বয় প্রতিসম।

(ii)

প্রমাণ : BCA বৃত্তাংশের চাপের উপর কালি দিয়া P যে কোন একটি বিন্দু ও $\overline{OP}$ ব্যাসার্ধ আঁক। এইবার $\overline{AB}$ ব্যাস বরাবর কাগজটিকে ভাঁজ করিলে $\overline{AB}$ ব্যাসের যে পার্শ্বে C আছে, উহার বিপরীত পার্শ্বে

P বিন্দু ও $\overline{OP}$ ব্যাসার্ধের ছাপ যথাক্রমে P′ ও $\overline{OP'}$ হইল। ∴ P′ ও $\overline{OP'}$ যথাক্রমে P ও $\overline{OP}$-র প্রতিবিম্ব হইল।

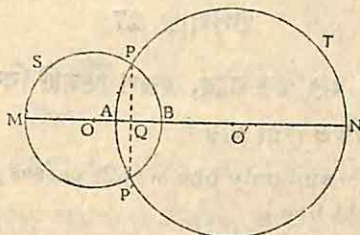
∴ ∠POB≅∠P′OB, লম্ব $\overline{PS}$≅লম্ব $\overline{P'S}$ এবং $\overline{OP}$≅$\overline{OP'}$ হইবে।

∴ P′, P-এর প্রতিসম বিন্দু অর্থাৎ P ও P′ প্রত্যেকে প্রত্যেকের প্রতিসম।

এইরূপে, $\overline{AB}$ বরাবর কাগজটিকে ভাঁজ করিলে দেখা যাইবে যে, $\widehat{ACB}$ চাপের উপর অপর যে কোন বিন্দু $\widehat{AC'B}$ চাপের উপর অনুরূপ কোন বিন্দুর উপর সমপাতিত হয়।

∴ ACBC′ বৃত্তটির $\overline{AB}$ ব্যাসের উভয় পার্শ্বস্থ অংশদ্বয় প্রতিসম।

[উপরোক্ত চিত্রে, $\overline{AB}$ **ব্যাসকে** ACBC′ **বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ** (Axis of symmetry) বলে।]

বিঃ দ্রঃ দুইটি বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা।

(2) **যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে, তবে উহারা অপর কোন প্রতিসম বিন্দুতে অবশ্যই ছেদ করিবে ও উহাদের সাধারণ জ্যা কেন্দ্রবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব হইবে।**

দেওয়া আছে : O, O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : উহারা দ্বিতীয় একটি প্রতিসম বিন্দু P′তে অবশ্যই ছেদ করিয়াছে এবং সাধারণ জ্যা PP′, $\overline{OO'}$-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ : এই বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ প্রতিসাম্য অক্ষ $\overleftrightarrow{OO'}$

$\overline{MB}$ ব্যাস বা প্রতিসাম্য অক্ষের যে পার্শ্বে $\widehat{MSB}$ চাপ আছে, ঐ চাপের উপর P যে-কোন একটি বিন্দু।

মনে কর, $\widehat{MSB}$ চাপের বিপরীত অংশে P-এর প্রতিবিম্ব P′ অবস্থিত।

∴ P ও P′ প্রত্যেকে প্রত্যেকের প্রতিসম বিন্দু (উপ 1.)।

∴ প্রতিসাম্য অক্ষ $\overleftrightarrow{OO'}$ হইতে $\overline{PQ}$ দূরত্ব≅$\overline{P'Q}$ দূরত্ব এবং $\overline{PP'}$, $\overleftrightarrow{OO'}$ অক্ষের উপর Q বিন্দুতে লম্ব।

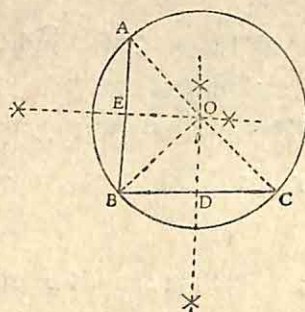
আবার, ∵ P বিন্দু বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ছেদ বিন্দু ও $\overleftrightarrow{OO'}$ সাধারণ প্রতিসাম্য অক্ষ।

∴ O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের $\widehat{ATN}$ চাপের উপর অবস্থিত P বিন্দুর প্রতিসম বিন্দুও P′ হইবে।

∴ P′ ঐ বৃত্তদ্বয়ের উপর সাধারণ দ্বিতীয় একটি প্রতিসম বিন্দু এবং সাধারণ জ্যা $\overline{PP'} \perp \overleftrightarrow{OO'}$.

উপপাদ্য 27

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে, এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবল একটিই বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

(There is one circle and only one which passes through three given points not in a straight line.)

দেওয়া আছে ঃ A, B এবং C তিনটি বিন্দু এবং উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ A, B এবং C-র মধ্য দিয়া কেবল একটি মাত্রই বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন ঃ AB এবং BC যোগ কর। $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর এবং মনে কর, উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এক্ষণে, O-কেবলমাত্র একটিই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে, যাহা A, B এবং C বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

OA, OB এবং OC যোগ কর।

প্রমাণ ঃ ∵ A, B এবং C বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে,

∴ $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় কোন না কোন একটি বিন্দুতে অবশ্যই মিলিত হইবে।

∴ O কেবলমাত্র একটিই বিন্দু, যেখানে $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় মিলিত হইয়াছে।

আবার, ∵ O, $\overline{AB}$-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত ∴ A এবং B হইতে উহা সমদূরবর্তী,

$\therefore \overline{OA} \cong \overline{OB}$;

অনুরূপে, ∵ O, $\overline{BC}$-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত ∴ B এবং C হইতে উহা সমদূরবর্তী,

$\therefore \overline{OB} \cong \overline{OC}$,

$\therefore \overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$;

∴ A, B এবং C এই তিনটি বিন্দু হইতে কেবলমাত্র O বিন্দুই সমদূরবর্তী।

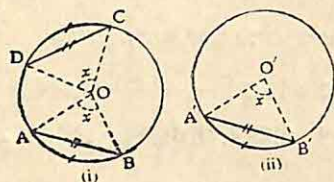
∴ O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত করা যায়, উহাই একমাত্র বৃত্ত যাহা A, B এবং C দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে, ঐ বিন্দুত্রয় অবশ্যই সমবৃত্ত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. যদি তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত না হয়, তবে ঐ বিন্দুগুলি দিয়া যে সকল বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, উহারা পরস্পরের উপর সমপাতিত হয়।

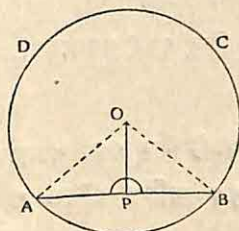
অনুসিদ্ধান্ত 3. কোন বৃত্ত অপর কোন বৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

স্বতঃসিদ্ধ ঃ সমান সমান বৃত্তে (বা, একই বৃত্তে), (i) সর্বসম জ্যা-দ্বারা

ছিন্ন চাপ-সমূহ পরস্পর সমান এবং (ii) সর্বসম জ্যা-এর সম্মুখীন কেন্দ্রস্থিত কোণসমূহ পরস্পর সর্বসম।

বিপরীতক্রমে, (i) সমান সমান বৃত্তে (বা, একই বৃত্তে), যে সকল জ্যা সমান চাপ ছিন্ন করে, তাহারা পরস্পর সর্বসম এবং (ii) কেন্দ্রস্থিত সর্বসম কোণের সম্মুখীন জ্যাসমূহ পরস্পর সর্বসম।

উপপাদ্য 23

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, উহা উক্ত জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

(A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord, which is not a diameter, is at right angles to the chord.)

দেওয়া আছে : ABCD একটি বৃত্ত। O ইহার কেন্দ্র। $\overline{AB}$, ব্যাস ভিন্ন যে কোন একটি জ্যা। $\overline{OP}$, $\overline{AB}$-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{OP} \perp \overline{AB}$.

অঙ্কন : OA এবং OB যোগ কর।

প্রমাণ ঃ Δ OAP ও Δ OBP-র মধ্যে,

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ($\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\overline{OP}$ সাধারণ,

এবং $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ ($\because$ P বিন্দুতে $\overline{AB}$ সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ।)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$; $\therefore$ $\angle OPA \cong \angle OPB$;

কিন্তু, $\angle OPA + \angle OPB =$ দুই সমকোণ

$\therefore$ $\angle OPA \cong \angle OPB = 1$ সমকোণ ।

$\therefore$ $\overline{OP} \perp \overline{AB}$.

বিপরীত (Converse) প্রতিজ্ঞা

যদি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা-এর উপর লম্ব হয়, তবে উহা উক্ত জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

(A straight line drawn from the centre of a circle at right angles to the chord, which is not a diameter, bisects the chord.)

দেওয়া আছে ঃ ABCD একটি বৃত্ত এবং O ইহার কেন্দ্র । $\overline{AB}$ ব্যাস ভিন্ন যে কোন একটি জ্যা । $\overline{OP} \perp \overline{AB}$. [পূর্বোক্ত চিত্র দেখ ।]

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

অঙ্কন ঃ OA এবং OB যোগ কর ।

প্রমাণ ঃ OAP ও OBP সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে, অতিভুজ $\overline{OA} \cong$ অতিভুজ $\overline{OB}$ ($\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ), $\overline{OP}$ সাধারণ ;

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ $\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম করে ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি সরলরেখা বৃত্তকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না ।

উদা. 1. $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ কোন বৃত্তের দুইটি সর্বসম জ্যা । প্রমাণ কর যে, $\angle$BAC-র সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম করে ।

(W. B. S. F. 1971)

দেওয়া আছে : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের জ্যা $\overline{AB}\cong$ জ্যা $\overline{AC}$.

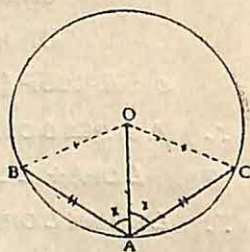
প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক O-এর মধ্য দিয়া যাইবে।

অঙ্কন : OA, OB এবং OC যোগ কর।

প্রমাণ : ΔOAB ও ΔOAC-র মধ্যে, $\overline{OB}\cong\overline{OC}$ ($\because$ প্রত্যেকে ব্যাসার্ধ), $\overline{OA}$ সাধারণ এবং $\overline{AB}\cong\overline{AC}$ (দেওয়া আছে)

$\therefore$ $\Delta OAB\cong\Delta OAC$ ($\because$ বাহু, বাহু, বাহু সমান)

$\therefore$ $\angle OAB\cong\angle OAC$ $\therefore$ $\overrightarrow{AO}$, $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যাইবে।

উদা. 2. $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$-এই সর্বসম জ্যা দুইটি A বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\overline{PA}\cong\overline{SA}$.

দেওয়া আছে : $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$—এই সমান জ্যাদ্বয় A বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{PA}\cong\overline{SA}$.

অঙ্কন : OA, OP এবং OS যোগ কর। $\overline{OM}\perp\overline{PQ}$ ও $\overline{ON}\perp\overline{RS}$ টান।

প্রমাণ : $\because$ $\overline{OM}\perp\overline{PQ}$ $\therefore$ M, $\overline{PQ}$-এর মধ্যবিন্দু হইবে। $\therefore$ $\overline{PM}\cong\overline{QM}$,

$\therefore$ $\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$; অনুরূপে, $\overline{SN}=\frac{1}{2}\overline{RS}$ $\therefore$ $\overline{PM}\cong\overline{SN}$ ($\because$ $\overline{PQ}\cong\overline{RS}$)

$\overline{OM}\perp\overline{PQ}$ এবং $\overline{ON}\perp\overline{RS}$ বলিয়া ΔOMP ও ΔONS-এর প্রত্যেকে সমকোণী ত্রিভুজ। এক্ষণে, OMP ও ONS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

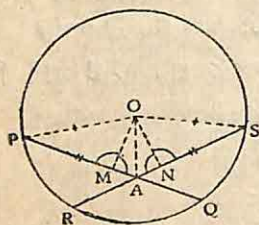
$\overline{PM}\cong\overline{SN}$, অতিভুজ $\overline{OP}\cong$ অতিভুজ $\overline{OS}$ ($\because$ প্রত্যেকে ব্যাসার্ধ)

$\therefore$ $\Delta OMP\cong\Delta ONS$ $\therefore$ $\overline{OM}\cong\overline{ON}$.

আবার, OMA ও ONA সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$\overline{OM}\cong\overline{ON}$, অতিভুজ $\overline{OA}$ সাধারণ $\therefore$ $\Delta OMA\cong\Delta ONA$ $\therefore$ $\overline{MA}\cong\overline{NA}$.

$\therefore$ $\overline{PM}+\overline{MA}=\overline{SN}+\overline{NA}$ $\therefore$ $\overline{PA}\cong\overline{SA}$.

অনুশীলনী 1

1. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্ত আঁক। (C. U. 1932)

2. বৃত্তের যে কোন দুইটি জ্যা কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম না করিলে, পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইবে না।

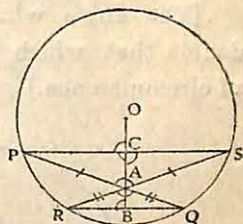
3. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই সর্ববৃহৎ জ্যা।

4. দুইটি বৃত্ত দুইটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিলে এবং ছেদবিন্দুদ্বয় ও কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে দেখাও যে, বৃত্ত দুইটি সমান।

5. দেখাও যে, দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উভয়ের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (C. U. 1950)

6. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ কোন বৃত্তের দুইটি সর্বসম জ্যা। কেন্দ্র O হইতে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র উপর যথাক্রমে $\overline{OP}$ ও $\overline{OQ}$ দুইটি লম্ব। প্রমাণ কর যে, $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$.

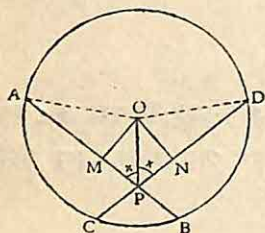
7. $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$—এই সর্বসম জ্যা দুইটি A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\overline{PS}$, $\overline{RQ}$-এর সমান্তরাল।

[**ইঙ্গিত ঃ** প্রথমে উদা. 2-এর সাহায্যে $\overline{AP} \cong \overline{AS}$ এবং $\overline{AR} \cong \overline{AQ}$ দেখাও। তৎপর, $\Delta ACP \cong \Delta ACS$ দেখাইয়া প্রমাণ কর যে, C, $\overline{PS}$-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ $\overline{OC} \perp \overline{PS}$. অনুরূপে, $\Delta ABR \cong \Delta ABQ$ দেখাইয়া প্রমাণ কর যে, B, $\overline{RQ}$-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ, $\overline{OB} \perp \overline{RQ}$].

8. দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত দুইটির অধিক বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না। (W. B. S. F. 1952)

9. $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ জ্যাদ্বয় $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধের সহিত সর্বসম কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

10. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা ছেদবিন্দুতে সর্বসম সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

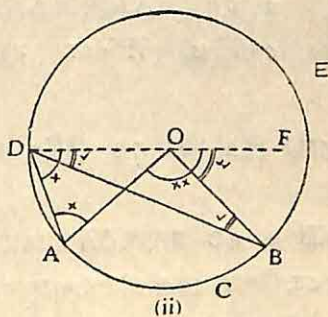
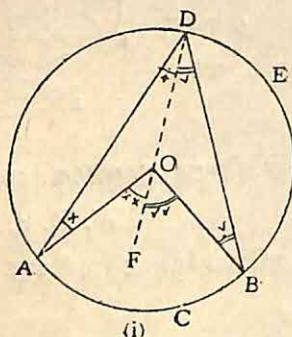
11. বৃত্তের সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম করে।

12. $\overline{XY}$, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা। R, $\overline{XY}$-এর মধ্যবিন্দু এবং $\overline{PQ}$ একটি ব্যাস। $\overline{XY}$ ও $\overline{PQ}$ যদি বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পরকে ছেদ না করে এবং উভয় দিকে বর্ধিত $\overline{XY}$-এর উপর P ও Q হইতে $\overline{PM}$ ও $\overline{QN}$ লম্ব টানা হইলে দেখাও যে, $\overline{OR} = \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{QN})$.

13. যদি বৃত্তের অভ্যন্তরে দুইটি জ্যা পরস্পরকে এমনভাবে ছেদ করে যাহাতে ছেদবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা প্রত্যেকটি জ্যা-এর সহিত সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, ঐ জ্যা দুইটি পরস্পর সর্বসম।

14. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $\overline{PA} \cong \overline{PD}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

উপপাদ্য 29

একই চাপ দ্বারা উৎপন্ন বৃত্তের কেন্দ্রস্থিত কোণ, পরিধির অবশিষ্ট অংশের উপর যে কোন বিন্দুস্থিত কোণের দ্বিগুণ।

(The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of circumference.)

দেওয়া আছে : O, ACBE বৃত্তের কেন্দ্র। $\overset{\frown}{ACB}$ চাপ। D পরিধির অবশিষ্ট অংশ $\overset{\frown}{BEA}$-এর উপর যে কোন একটি বিন্দু। $\overset{\frown}{ACB}$ কেন্দ্রে $\angle AOB$ এবং পরিধির অবশিষ্ট অংশের D-বিন্দুতে $\angle ADB$ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle AOB = 2\angle ADB$.

অঙ্কন : DO যোগ করিয়া F পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ : ΔAOD-র $\overline{OA} \cong \overline{OD}$ ($\because$ প্রত্যেকে ব্যাসার্ধ) $\therefore \angle OAD \cong \angle ODA$;

আবার, $\angle AOF = \angle OAD + \angle ODA$ ($\because$ Δ-এর বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান)

$\therefore \angle AOF = 2\angle ODA$; অনুরূপে, $\angle BOF = 2\angle ODB$.

$\therefore \angle AOF + \angle BOF = 2\angle ODA + 2\angle ODB = 2(\angle ODA + \angle ODB)$

$\therefore \angle AOB = 2\angle ADB$.

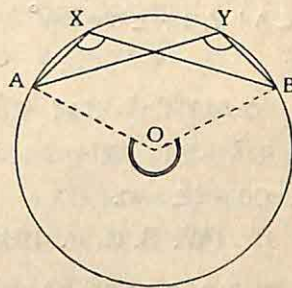
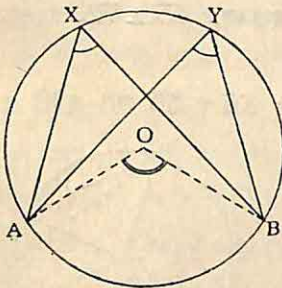
আবার, চিত্র (*ii*) হইতে—

$\angle AOB = \angle AOF - \angle BOF$

$= 2\angle ODA - 2\angle ODB = 2(\angle ODA - \angle ODB) = 2\angle ADB$.

উপপাদ্য 30

একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলি পরস্পর সর্বসম।

(Angles in the same segment of a circle are congruent.)

দেওয়া আছে : O বৃত্তের কেন্দ্র। $\angle AXB$ ও $\angle AYB$, AXYB বৃত্তাংশে অবস্থিত।

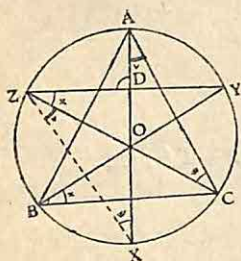
প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle AXB$ ও $\angle AYB$ সর্বসম।

অঙ্কন : OA এবং OB যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ একই $\overset{\frown}{AB}$-র উপর কেন্দ্রস্থিত $\angle AOB$, পরিধিস্থিত $\angle AXB$ ও $\angle AYB$ অবস্থিত, $\therefore 2\angle AXB = \angle AOB$ এবং $2\angle AYB = \angle AOB$ (উপঃ 29)

$\therefore 2\angle AXB = 2\angle AYB \quad \therefore \angle AXB \cong \angle AYB$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণ একসমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

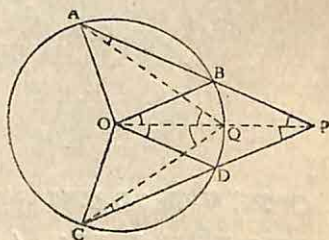
অনুসিদ্ধান্ত 2. অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

উদা. 1. ABC বৃত্তস্থ ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিকে যথাক্রমে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\overline{AX} \perp \overline{YZ}$.

প্রমাণ : $\angle ADZ = \angle DZX + \angle DXZ$
$= \angle CZX + \angle CZY + \angle AXZ$
$= \angle CAX + \angle CBY + \angle ACZ$
$= \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$

($\because$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$) অতএব, $\overline{AX} \perp \overline{YZ}$.

উদা. 2. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বাহিরে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle ACC - \angle BOD = 2\angle APC$.

(W. B. S. F. 1968)

দেওয়া আছে : O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বাহিরে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle APC$.

অঙ্কন : OP যোগ কর। মনে কর, উহা বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AQ ও CQ যোগ কর।

প্রমাণ : এক্ষণে, $\because$ একই $\overset{\frown}{BQ}$-এর উপর BOQ কেন্দ্রস্থ কোণ ও BAQ পরিধিস্থিত কোণ, $\therefore$ $\angle BOQ = 2\angle BAQ$; অনুরূপে, $\angle DOQ = 2\angle DCQ$,

এক্ষণে, $\angle BOD = \angle BOQ + \angle DOQ = 2\angle BAQ + 2\angle DCQ$

$= 2(\angle AQO - \angle APQ) + 2(\angle CQO - CPQ)$.

(Δ-এর বহিঃকোণ ও বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সম্বন্ধ হইতে)

আবার, $\angle AOC = 2\angle AQC = 2(\angle AQO + \angle CQO)$.

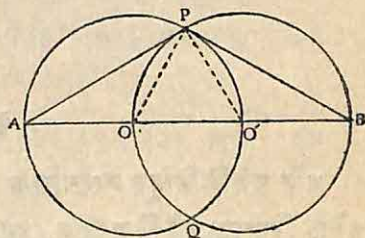
$\therefore \angle AOC - \angle BOD = 2\angle AQO + 2\angle CQO - 2\angle AQO + 2\angle APQ - 2\angle CQO + 2\angle CPQ$

$= 2\angle APQ + 2\angle CPQ = 2(\angle APQ + \angle CPQ) = 2\angle APC$.

অনুশীলনী 2

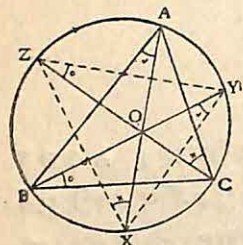
1. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A ও B-র মধ্য দিয়া যথাক্রমে PAQ ও PBR দুইটি সরলরেখা টানা হইল। P-বিন্দু একটি বৃত্তে এবং Q ও R-বিন্দু অপর বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হইলে প্রমাণ কর যে, $\angle PBQ \cong \angle PAR$.

2. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুর মধ্যদিয়া প্রত্যেক বৃত্তের মধ্যে একটি করিয়া $\overline{AP}$ ও $\overline{AQ}$ দুইটি ব্যাস অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে, P, B এবং Q একরেখীয় হইবে। (W. B. S. F. 1970)

3. O, O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ দুইটি সমান এবং ইহারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি বৃত্ত দুইটির একটি অপরটির কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম করিয়া যায় এবং $\overline{AO'}$ ও $\overline{BO}$ এই ব্যাসদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হয় ; তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

4. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তের $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle APC$. (S. F. 1953)

5. AEB, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের উপচাপ। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}$ জ্যা-এর সম্মুখস্থ এবং অধিচাপের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

6. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। $\widehat{BAC}$-র যে পার্শ্বে A আছে P উহার বিপরীত পার্শ্বস্থ চাপের উপর যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overline{AP} = \overline{BP} + \overline{CP}$. (C. U. 1929)

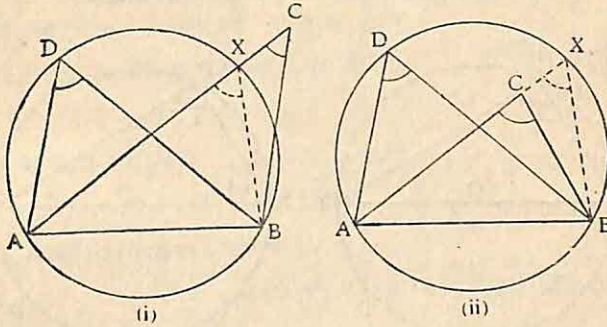
7. $\widehat{AEB}$, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অধিচাপ। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}$ জ্যা-এর সম্মুখস্থ এবং উপচাপের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

8. ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ। ইহার অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় যথাক্রমে পরিধির X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle YXZ = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle ZYX = 90° - \frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle XZY = 90° - \frac{1}{2}\angle C$. (C. U.)

9. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। উপ $\widehat{BEC}$-র উপর D যে-কোন বিন্দু। $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle ACD \cong \angle DFB$.

উপপাদ্য 31

যদি দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ উহার একই পার্শ্বস্থ, অন্য দুইটি বিন্দুতে দুইটি সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ চারিটি বিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

(If the line segment joining two points subtends congruent angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.)

(i) (ii)

দেওয়া আছে ঃ A ও B দুইটি বিন্দু। $\overline{AB}$-র একই পার্শ্বে অবস্থিত অপর দুইটি বিন্দু যথাক্রমে C ও D এবং ∠ADB ও ∠ACB সর্বসম।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ A, B, C, D এই চারিটি বিন্দু সমবৃত্ত।

প্রমাণ ঃ A, B, C, D এই চারিটি বিন্দুর মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব না হইলেও, যে কোন তিনটি বিন্দু A, B ও D-র মধ্য দিয়া অবশ্যই একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। (উপ : 27)

মনে কর, A, B ও D-র মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত $\overline{AC}$-কে X বিন্দুতে [চিত্র (*i*)] বা বর্ধিত $\overline{AC}$-কে X বিন্দুতে [চিত্র (*ii*)] ছেদ করিয়াছে। XB যুক্ত কর।

এক্ষণে, ∠ADB≅∠AXB (∵ একই বৃত্তাংশে অবস্থিত);

আবার, ∠ADB≅∠ACB (দেওয়া আছে); ∴ ∠AXB≅∠ACB.

কিন্তু ইহা অসম্ভব; কারণ, ত্রিভুজের বহিঃকোণ উহার বিপরীত একটি অন্তঃকোণের সহিত সমান হইতে পারে না।

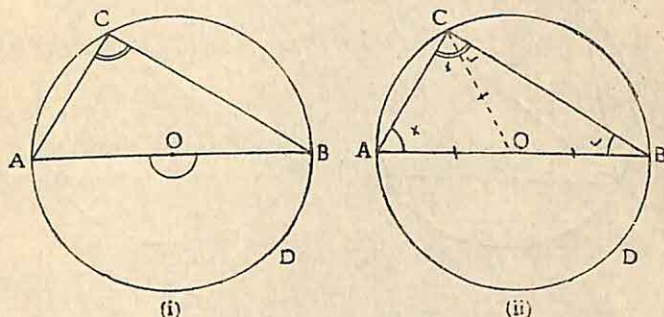
∴ A, B ও D-বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত $\overline{AC}$-র C-বিন্দু ব্যতীত অপর কোন বিন্দু দিয়া অতিক্রম করিতেও পারে না।

∴ A, B ও D-র মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত C বিন্দুর মধ্য দিয়া অবশ্যই যাইবে।

∴ A, B, C, D এই চারিটি বিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

উপপাদ্য 32

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(The angle in a semicircle is a right angle.)

দেওয়া আছে : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $\overline{AB}$ ব্যাস। $\angle ACB$, অর্ধবৃত্তস্থ যে কোন একটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

প্রমাণ : একই $\widehat{ADB}$-র উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ ও পরিধিস্থিত $\angle ACB$ অবস্থিত বলিয়া, $\angle AOB = 2\angle ACB$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$, কিন্তু, $\angle AOB = 1$ সরল কোণ $= 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

চিত্র (*ii*) অনুযায়ী অন্যরকমভাবে প্রমাণ :

অঙ্কন : OC যোগ কর।

প্রমাণ : এক্ষণে, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ ($\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore$ $\angle OCA \cong \angle OAC$;

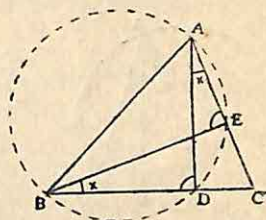
আবার, $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ ($\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore$ $\angle OCB \cong \angle OBC$;

$\therefore$ সমগ্র $\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = \angle OAC + \angle OBC$;

কিন্তু, $\angle ACB + \angle OAC + \angle OBC = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ACB + \angle ACB = 2$ সমকোণ

অথবা, $2\angle ACB = 2$ সমকোণ। $\therefore$ $\angle ACB = 1$ সমকোণ।

উদা. 1. △ABC-র A ও B হইতে $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{AD}$ ও $\overline{BE}$ লম্ব। প্রমাণ কর যে, ∠DAC≅∠EBC.

দেওয়া আছে : △ABC-র A ও B বিন্দু দুইটি হইতে যথাক্রমে $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-এর উপর $\overline{AD}$ ও $\overline{BE}$ লম্ব।

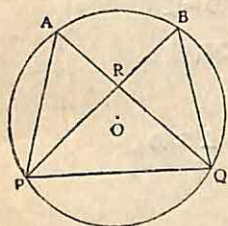
প্রমাণ করিতে হইবে : ∠DAC≅∠EBC.

প্রমাণ : ∵ $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ও $\overline{BE}\perp\overline{CA}$

∴ ∠ADB≅∠AEB = 1 সমকোণ।

আবার, ∵ ∠ADB ও ∠AEB এই সর্বসম কোণ দুইটি $\overline{AB}$-র একই পার্শ্বে অবস্থিত,

∴ A, B, D, E সমবৃত্ত।

এক্ষণে, ∠DAE ও ∠EBD একই চাপের উপর অবস্থিত বলিয়া উহারা সর্বসম হইবে। ∴ ∠DAC≅∠EBC.

উদা. 2. A ও B বিন্দুদ্বয় $\overline{PQ}$-র একই দিকে অবস্থিত। $\overline{PB}$ ও $\overline{AQ}$, R বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করিয়াছে যাহাতে, $\overline{PR}\cong\overline{QR}$ হইয়াছে। যদি $\overline{BP}\cong\overline{AQ}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A, B, Q, P সমবৃত্ত।

দেওয়া আছে : A ও B বিন্দু দুইটি $\overline{PQ}$-র একই দিকে অবস্থিত। $\overline{BP}\cong\overline{AQ}$ এবং $\overline{PR}\cong\overline{QR}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : A, B, Q, P সমবৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ $\overline{BP}\cong\overline{AQ}$ এবং $\overline{PR}\cong\overline{QR}$ ∴ $\overline{AR}\cong\overline{BR}$;

এক্ষণে, △APR ও △BQR-এর মধ্যে,

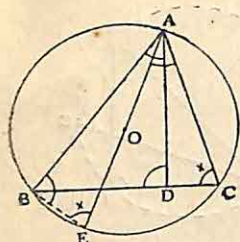
$\overline{PR}\cong\overline{QR}$, $\overline{AR}\cong\overline{BR}$ এবং অন্তর্ভূ্ত ∠ARP≅অন্তর্ভূ্ত ∠BRQ

(∵ বিপ্রতীপ কোণ)

∴ △APR≅△BQR ∴ ∠PAR≅∠QBR

অর্থাৎ, ∠PAQ≅∠QBP.

আবার, ∵ এই কোণদ্বয় $\overline{PQ}$-র একই পার্শ্বে অবস্থিত ;

অতএব, A, B, Q, P সমবৃত্ত।

উদা. 3. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থিত কোন বিন্দু A হইতে $\overline{BC}$ জ্যা-এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব। A-বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overline{AE}$ ব্যাস টানা হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BAD \cong \angle EAC$. (C. U. 1948)

দেওয়া আছেঃ A পরিধিস্থিত একটি বিন্দু এবং $\overline{BC}$ জ্যা। $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ এবং $\overline{AE}$ একটি ব্যাস।

প্রমাণ করিতে হইবেঃ $\angle BAD \cong \angle EAC$.

অঙ্কনঃ BE যুক্ত কর।

প্রমাণঃ $\because$ A, B, E, C সমবৃত্ত $\therefore$ AB চাপের উপর অবস্থিত

$\angle AEB \cong \angle ACB$; অর্থাৎ, $\angle AEB \cong \angle ACD$;

$\because$ $\overline{AE}$ ব্যাস $\therefore$ ABE অর্ধবৃত্ত।

এক্ষণে, $\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ 1 সমকোণ, $\therefore$ $\angle ABE = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ ABE একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\therefore$ $\angle AEB + \angle BAE = 1$ সমকোণ।

আবার, $\because$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\therefore$ $\angle ADC = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ ADC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ACD + \angle CAD = 1$ সমকোণ।

এক্ষণে, $\angle AEB + \angle BAE = \angle ACD + \angle CAD = 1$ সমকোণ।

কিন্তু, $\angle AEB \cong \angle ACD$, $\therefore$ $\angle BAE \cong \angle CAD$.

$\therefore$ $\angle BAE +$ সাধারণ $\angle EAD = \angle CAD +$ সাধারণ $\angle EAD$;

অতএব, $\angle BAD \cong \angle EAC$.

অনুশীলনী 3

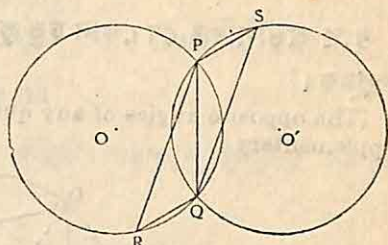
1. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, ACBD একটি আয়তক্ষেত্র।

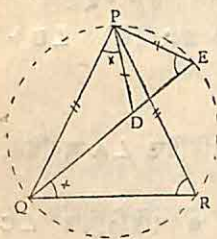
2. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, B, C, E, F সমবৃত্ত।

3. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্ত অবশ্যই সমকৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে। (C. U. 1927)

4. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। $\angle C$-র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle DAC = 1$ সমকোণ।

5. ABCD বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম। $\overline{AD} \| \overline{BC}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

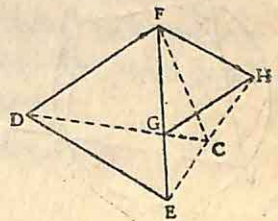
6. O, O′ কেন্দ্রবিশিষ্ট সমান বৃত্তদ্বয় যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{PR}$ ও $\overline{QS}$ যথাক্রমে ঐ বৃত্তদ্বয়ের দুইটি জ্যা। যদি $\overline{PS} \cong \overline{QR}$, $\overline{PR} \cong \overline{QS}$ হয়, তবে PRQS একটি সামান্তরিক হইবে।

7. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ এবং $\overline{AB}$-এর যে পার্শ্বে C আছে, E উহার বিপরীত পার্শ্বে একটি বিন্দু। যদি $\angle AEB = 1$ সমকোণ, $\overline{AE} \cong \overline{BD}$ এবং $\angle ABE = 2\angle EAB$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A, E, B, D সমবৃত্ত।

8. △ABC-র ∠A সমকোণ। $\overline{BC}$ ও $\overline{AB}$-র উপরে যথাক্রমে BPQC ও BRSA দুইটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করা হইল। যদি $\overline{AP}$ ও $\overline{CR}$, D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে B, P, C, D সমবৃত্ত।

9. △PQR-এর $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$। D ইহার মধ্যস্থিত যে কোন একটি বিন্দু। $\overline{QD}$-কে বর্ধিত কর এবং বর্ধিতাংশ হইতে $\overline{PD}$-র সমান করিয়া PE কাটিয়া লও। যদি $\angle DPQ \cong \angle DQR$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, P, Q, R, E একই বৃত্তস্থ।

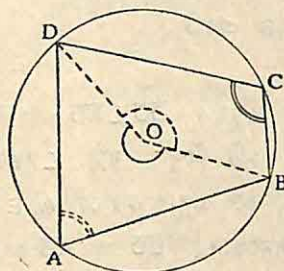
*10. একই বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তস্থ একটি সাধারণ বিন্দুতে মিলিত হইবে। (C. U. 1951)

11. একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান শীর্ষকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলই বৃহত্তম। (C. U. 1941)

12. P, Q, R ও S সমবৃত্ত। ∠PQR ও ∠RSP-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে বৃত্তকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, DE উক্ত বৃত্তটির একটি ব্যাস।

13. $\overline{EF}$-এর দুই পার্শ্বে EFD ও FGH দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ। EH যুক্ত কর। $\overline{DG}$-কে বর্ধিত করিয়া $\overline{EH}$-এর C বিন্দু পর্যন্ত টান। প্রমাণ কর যে, E, C, F, D সমবৃত্ত।

উপপাদ্য 33

বৃত্তে অন্তর্লিখিত যে কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

(The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.)

দেওয়া আছে ঃ O বৃত্তের কেন্দ্র। ABCD বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ (i) $\angle A + \angle C = 2$ সমকোণ এবং (ii) $\angle B + \angle D = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ OB ও OD যোগ কর।

প্রমাণ ঃ $\because$ BCD চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ ও পরিধিস্থিত $\angle A$ অবস্থিত,

$\therefore$ $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOD$;

আবার, $\because$ DAB চাপের উপর কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle DOB$ ও পরিধিস্থিত $\angle C$ অবস্থিত,

$\therefore$ $\angle C = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle DOB$;

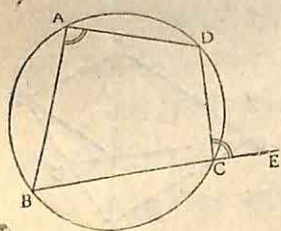
$\therefore$ (i) $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle DOB$

$= \frac{1}{2}(\angle BOD +$ প্রবৃদ্ধ $\angle DOB)$

$= \frac{1}{2} \times$ চারি সমকোণ $= 2$ সমকোণ

অনুরূপে, OA ও OC যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

(ii) $\angle B + \angle D = 2$ সমকোণ।

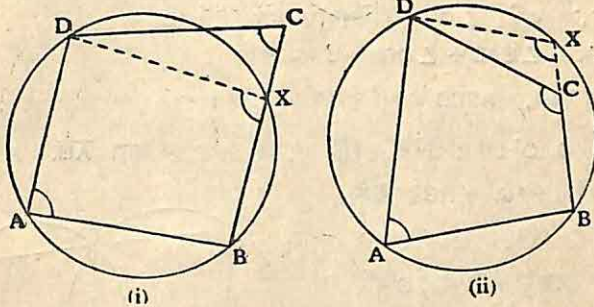
অনুসিদ্ধান্ত ঃ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন বাহুকে বর্ধিত করিলে, বহিঃকোণটি উক্ত চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সহিত সর্বসম হইবে।

দেওয়া আছে ঃ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BC-কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\angle DCE \cong \angle BAD$.

প্রমাণ : $\because$ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, $\therefore$ $\angle BAD + \angle DCB = 2$ সমকোণ।
আবার, $\angle DCB + \angle DCE = 2$ সমকোণ।
$\therefore$ $\angle BAD + \angle DCB = \angle DCB + \angle DCE$. $\therefore$ $\angle DCE \cong \angle BAD$.

উপপাদ্য 34

কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক হইলে, চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

(If a pair of opposite angles of any quadrilateral be supplementary, the quadrilateral is cyclic.)

দেওয়া আছে : ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার $\angle A + \angle C = 2$ সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে : ABCD চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজটির A, B, C, D এই চারিটি শীর্ষবিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব না হইলেও, ইহার যে কোন তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়া অবশ্যই একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় (উপ: 27)।

মনে কর, A, B ও D বিন্দুর মধ্য দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল, যাহা $\overline{BC}$-কে [চিত্র (i)] বা বর্ধিত $\overline{BC}$-কে [চিত্র (ii)] X বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, $\angle A + \angle DXB = 2$ সমকোণ (উপ: 33)
আবার, $\angle A + \angle C = 2$ সমকোণ (দেওয়া আছে)
$\therefore$ $\angle A + \angle DXB = \angle A + \angle C$ $\therefore$ $\angle DXB \cong \angle C$;

কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ ত্রিভুজের বহিঃকোণ বিপরীত একটি অন্তঃকোণের সমান হইতে পারে না। $\therefore$ A, B ও D-বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত $\overline{BC}$-র C-বিন্দু ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু দিয়াও অতিক্রম করিতে পারে না।

$\therefore$ A, B ও D বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত C বিন্দুর মধ্য দিয়াও যাইবে।
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি চতুর্ভুজের কোন বহিঃকোণ, উহার বিপরীত অন্তঃকোণের সহিত সর্বসম হয়, তবে চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

দেওয়া আছে ঃ ABCD চতুর্ভুজের বহিঃ ∠DCE≅বিপরীত অন্তঃ ∠BAD.

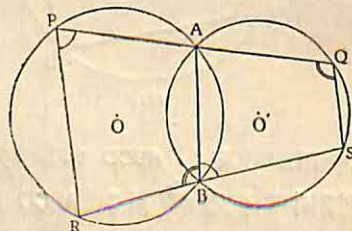
প্রমাণ করিতে হইবে ঃ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ ঃ এক্ষণে, ∠DCE + ∠DCB = 2 সমকোণ।

কিন্তু, ∵ বহিঃ ∠DCE = বিপরীত অন্তঃ ∠BAD

∴ ∠BAD + ∠DCB = 2 সমকোণ

অতএব, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

উদা. 1. O, O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা $\overline{AB}$. A ও B বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়া PAQ ও RBS দুইটি সরলরেখা টানা হইল। P, R যদি O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের এবং Q, S যদি O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, *$\overleftrightarrow{PR} \| \overleftrightarrow{QS}$.

দেওয়া আছে ঃ O, O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা $\overline{AB}$. A ও B বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে PAQ এবং RBS দুইটি সরলরেখা টানা হইল। উহারা যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের পরিধির P ও Q এবং R ও S-বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overleftrightarrow{PR} \| \overleftrightarrow{QS}$.

প্রমাণ : ∵ PRBA বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ বহিঃ ∠ABS≅বিপরীত অন্তঃ ∠APR ;

অনুরূপে, বহিঃ ∠ABR≅বিপরীত অন্তঃ ∠AQS.

কিন্তু, ∠ABS + ∠ABR = 2 সমকোণ। ∴ ∠APR + ∠AQS = 2 সমকোণ

অর্থাৎ ∠QPR + ∠PQS = 2 সমকোণ অতএব, $\overleftrightarrow{PR} \| \overleftrightarrow{QS}$.

---

*$\overleftrightarrow{PR}$ ও $\overleftrightarrow{QS}$-কে উভয়দিকে অসীম বর্ধিত কেবলমাত্র দুইটি সরলরেখা বুঝাইতে ধরা হইয়াছে।

উদা. 2. বৃত্তস্থ ত্রিভুজের বাহিরের দিকের তিনটি বৃত্তাংশে অবস্থিত কোণ তিনটির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান। (C. U. 1950)

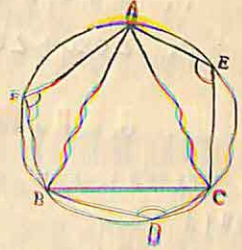
দেওয়া আছে ঃ ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ। ∠AFB, ∠BDC ও ∠CEA যথাক্রমে AFB, BDC ও CEA বৃত্তাংশস্থিত তিনটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ ∠AFB + ∠BDC + ∠CEA = 4 সমকোণ।

প্রমাণ ঃ ∵ AFBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

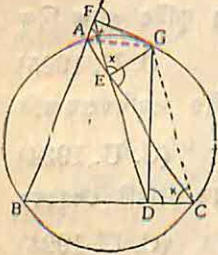
∴ ∠AFB + ∠ACB = 2 সমকোণ

অনুরূপে, ∠BDC + ∠BAC = 2 „

এবং ∠CEA + ∠ABC = 2 „

যোগ করিয়া, ∠AFB + ∠ACB + ∠BDC + ∠BAC + ∠CEA + ∠ABC = 6 সমকোণ।

অর্থাৎ, ∠AFB + ∠BDC + ∠CEA = 6 সমকোণ − (∠ABC + ∠ACB + ∠BAC)

= 6 সমকোণ − 2 সমকোণ = 4 সমকোণ।

***উদা. 3.** বৃত্তস্থ ত্রিভুজের পরিধির উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর লম্বগুলির পাদবিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। (C. U. 1938, 1941)

দেওয়া আছে ঃ ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ। G ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু। G হইতে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও বর্ধিত $\overline{BA}$-র উপর যথাক্রমে $\overline{GD}$, $\overline{GE}$ ও $\overline{GF}$ লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ D, E, F একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন ঃ GA ও GC যোগ কর।

প্রমাণ ঃ ∵ $\overline{GF}$ ⊥ বর্ধিত $\overline{BA}$ ও $\overline{GE}$ ⊥ $\overline{AC}$

∴ ∠AFG + ∠AEG = 2 সমকোণ।

∴ AEGF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠GEF ≅ ∠GAF (∵ একই বৃত্তাংশস্থ কোণ)

আবার, A, B, C, G সমবৃত্ত বলিয়া, ∠GAF ≅ ∠BCG ;

অর্থাৎ, ∠GAF ≅ ∠DCG ;

এক্ষণে, $\because$ $\overline{GD} \perp \overline{BC}$ এবং $\overline{GE} \perp \overline{CA}$

$\therefore$ $\angle GDC \cong \angle CEG = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ D, C, G, E সমবৃত্ত $\therefore$ $\angle GED + \angle DCG = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle GED + \angle GEF = 2$ সমকোণ

[$\because$ $\angle GAF \cong \angle DCG \cong \angle GEF$ (প্রমাণিত)]

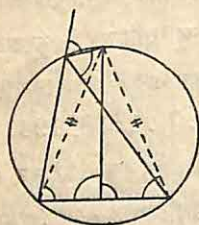
$\therefore$ D, E, F একই সরলরেখায় অবস্থিত।

[**লক্ষ্য কর :** DEF রেখাটিকে G বিন্দুর **পাদরেখা** (Pedal line) বলা হয়।]

অনুশীলনী 4

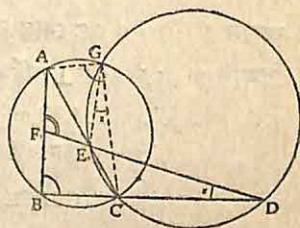
1. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র। : (C. U. 1920)

2. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, দেখাও যে, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

3. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ইহার $\overline{AD} \| \overline{BC}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

4. বৃত্তস্থ ত্রিভুজের শীর্ষকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক পরিধিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, উহা ভূমির প্রান্ত বিন্দু দুইটি হইতে সমদূরবর্তী। (C. U. 1925)

5. কোন চতুর্ভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ গঠন করে। (C. U. 1934)

6. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বাহিরের দিকের চারিটি বৃত্তাংশে অবস্থিত চারিটি কোণের সমষ্টি ছয় সমকোণ হইবে। (C. U. 1925)

7. ABC একটি বৃত্তস্থ সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\angle ABC = 1$ সমকোণ। সমকৌণিক বিন্দু B পরিধির যে পার্শ্বে অবস্থিত G উহার বিপরীত পার্শ্বে পরিধিস্থিত আর একটি বিন্দু। G ও C-র মধ্য দিয়া অঙ্কিত অপর একটি বৃত্ত $\overline{AC}$-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। BC-কে বর্ধিত কর। মনে কর, উহা অপর বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DE-কে বর্ধিত করিয়া $\overline{AB}$-র F বিন্দু পর্যন্ত টান। প্রমাণ কর যে, EGAF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

8. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও উহার বিপরীত কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে মিলিত হয়। (C. U. 1924)

9. ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্য বিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F. কোন শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু যদি P হয়, তবে প্রমাণ কর যে, P, D, E, F সমবৃত্ত। (C. U. 1943)

10. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত $\overline{BA}$ ও $\overline{CD}$, P বিন্দুতে এবং বর্ধিত $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$, R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। Δ PBC ও Δ RCD-র পরিবৃত্ত দুইটি Q বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, P, Q, R একরেখীয় হইবে।

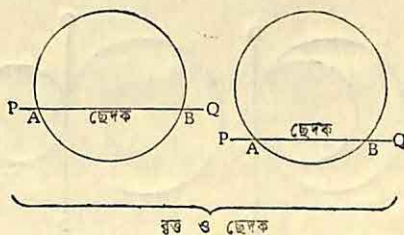
*11. কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বসমূহের পাদবিন্দু তিনটি একরেখীয় হইলে, প্রমাণ কর যে, উক্ত বিন্দুটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত। (C. U. 1931, '41)

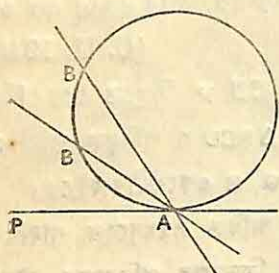
*12. ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষ হইতে বিপরীত তিন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষ ও লম্ববিন্দু (ortho-centre)-এর সংযোজক সরলরেখা তিনটির মধ্যবিন্দুসকল সমবৃত্ত হইবে। (C. U. 1937, '40, '50)

তৃতীয় অধ্যায়

স্পর্শক (Tangent)

3.1. কোন সরলরেখাকে উভয়দিকে অসীম বর্ধিত করিলে, যদি উহা বৃত্তের পরিধিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ঐ সরলরেখাকে **ছেদক** (Secant) বলে।

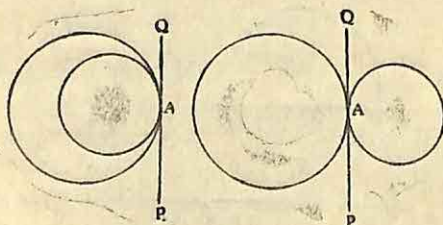
চিত্র (*i*) হইতে—$\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদক, কারণ ইহা বৃত্তকে A ও B বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে।

বৃত্ত ও ছেদক, চিত্র (*i*)

চিত্র (*ii*) হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ ছেদকটির ছেদবিন্দু A-কে স্থির রাখিয়া চিত্রানুযায়ী যদি $\overleftrightarrow{AB}$ কে ঘুরান যায়, তবে অপর ছেদবিন্দু B পরিধি বরাবর ক্রমশঃই A-বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে হইতে অবশেষে A-বিন্দুর উপর আসিয়া সমপাতিত হইবে। তখন ঐ সরলরেখাটি (ছেদকটি) আর ছেদক থাকিবে না। ঐরূপ সরলরেখাকে **স্পর্শক** বলে। স্পর্শক বৃত্তকে একটিই মাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে।

স্পর্শক, চিত্র (*ii*)

চিত্র (*ii*)-তে $\overleftrightarrow{PA}$ স্পর্শক, A **স্পর্শবিন্দু** (point of contact).

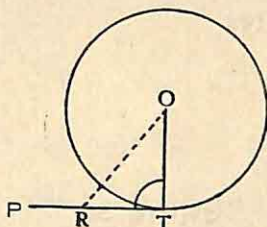
নিম্নের চিত্র (*i*)-এ, দুইটি বৃত্তের একটি অপরটির অভ্যন্তরে থাকিয়া স্পর্শ করিয়াছে। এরূপ স্পর্শ হইবে **অন্তঃস্পর্শ** (internal contact)।

আবার, দুইটি বৃত্তের একটি অপরটির বাহিরে থাকিয়া স্পর্শ করিয়াছে [নিম্নের চিত্র (*ii*)]। ঐরূপ স্পর্শকে **বহিঃস্পর্শ** (external contact) বলে।

সাধারণ স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** (common tangent) বলে। $\overleftrightarrow{PQ}$ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

চিত্র (*i*) চিত্র (*ii*)

উপপাদ্য 35

বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পরের উপর লম্ব।

(The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.)

দেওয়া আছে ঃ O বৃত্তের কেন্দ্র এবং T বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত যে কোন একটি বিন্দু। T বিন্দুতে $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক এবং $\overline{OT}$ ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{PT}$.

প্রমাণ ঃ যদি $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{PT}$ না হয় তবে মনে কর, $\overline{OR} \perp \overleftrightarrow{PT}$

$\therefore$ $\angle ORT = 1$ সমকোণ $\therefore$ $\angle OTR < 1$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle OTR < \angle ORT$ $\therefore$ $\overline{OR} < \overline{OT}$;

কিন্তু, $\overline{OT}$ ব্যাসার্ধ $\therefore$ $\overline{OR} <$ ব্যাসার্ধ;

$\therefore$ R বিন্দু বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত হইবে।

এক্ষণে, TR যুক্ত করিয়া যথেচ্ছ বর্ধিত করিলে, উহা বৃত্তটিকে অন্য একটি বিন্দুতে অবশ্যই ছেদ করিবে।

$\therefore$ উক্ত সরলরেখাটি অর্থাৎ, $\overleftrightarrow{PT}$ একটি ছেদক-এ পরিণত হইবে।

কিন্তু, সর্তানুসারে ইহা হইতে পারে না ($\because$ $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক)

$\therefore$ $\overline{OR} \perp \overleftrightarrow{PT}$ হইতেও পারে না।

$\therefore$ $\overline{OT}$-ই $\perp \overleftrightarrow{PT}$ হইবে।

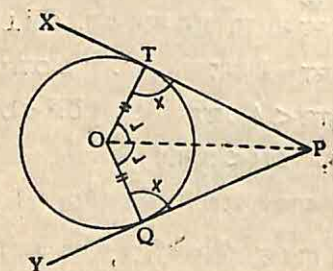
অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে কেবল মাত্র একটিই স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিধিস্থিত প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব, ঐ বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. কোন বৃত্তের স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব অবশ্যই কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম করিবে।

উপপাদ্য 36

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে স্পর্শ বিন্দুগুলি পর্যন্ত অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক-দ্বয়ের অংশ দুইটি সর্বসম এবং উহারা কেন্দ্রে সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে।

(The segments of two tangents of a circle from an external point to the points of contact are congruent and they subtend congruent angles at the centre.)

দেওয়া আছে : O বৃত্তের কেন্দ্র। P বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। $\overrightarrow{PX}$ ও $\overrightarrow{PY}$ স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে T ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। PT ও PQ যথাক্রমে $\overrightarrow{PX}$ ও $\overrightarrow{PY}$ স্পর্শকদ্বয়ের অংশ।

প্রমাণ করিতে হইবে : $PT \cong PQ$ এবং $\angle POT \cong \angle POQ$.

অঙ্কন ঃ OP যোগ কর।

প্রমাণ ঃ $\angle OTP = 1$ সমকোণ (∵ $\overline{PT}$ স্পর্শক এবং $\overline{OT}$ ব্যাসার্ধ);
অনুরূপে, $\angle OQP$ও 1 সমকোণ ;

∴ OTP ও OQP এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,
$\overline{OT} \cong \overline{OQ}$ (∵ প্রত্যেকে ব্যাসার্ধ) ;
$\overline{OP}$ অতিভুজ উভয়ের মধ্যে সাধারণ,

∴ $\Delta OTP \cong \Delta OQP$;

∴ $\overline{PT} \cong \overline{PQ}$,

এবং $\angle POT \cong \angle POQ$.

[বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করিলে, স্পর্শবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাকে উক্ত বিন্দুর **স্পর্শ জ্যা** (chord of contact) বলে।]

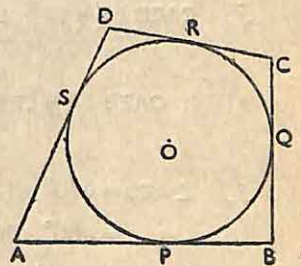
অনুসিদ্ধান্ত 1. বহিঃস্থ যে বিন্দু হইতে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা যায়, ঐ বিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সহিত উক্ত স্পর্শকদ্বয় সমান কোণে আনত হয়।

উদা. 1. বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে-কোন দুই বিপরীত বাহু একত্রযোগে অপর দুইটি বাহুর সমষ্টির সমান হইবে। (C. U. 1931)

দেওয়া আছে ঃ O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ABCD একটি পরিলিখিত চতুর্ভুজ এবং বৃত্তটি ঐ চতুর্ভুজটির $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ বাহুর যথাক্রমে P, Q, R ও S-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

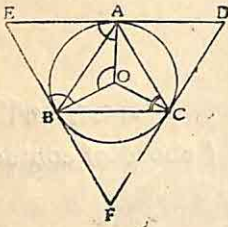
প্রমাণ ঃ ∵ $\overline{AP}$ ও $\overline{AS}$ স্পর্শকদ্বয় বহিঃস্থ বিন্দু A-তে মিলিত হইয়াছে,

∴ $\overline{AP} \cong \overline{AS}$ অনুরূপে, $\overline{BP} \cong \overline{BQ}$, $\overline{CQ} \cong \overline{CR}$ এবং $\overline{DR} \cong \overline{DS}$.

$\therefore$ $\overline{AP}+\overline{DR}=\overline{AS}+\overline{DS}$ এবং $\overline{BP}+\overline{CR}=\overline{BQ}+\overline{CQ}$.

$\therefore$ $\overline{AP}+\overline{DR}+\overline{BP}+\overline{CR}=\overline{AS}+\overline{DS}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$;

$\therefore$ $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{AD}+\overline{BC}$;

$\therefore$ $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$.

উদা. 2. বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির মধ্য দিয়া ঐ বৃত্তে তিনটি স্পর্শক অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ স্পর্শকত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। (C. U. 1913)

দেওয়া আছে ঃ ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। O-বৃত্তের কেন্দ্র। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ ব্যাসার্ধ। A, B ও C-র মধ্য দিয়া যথাক্রমে DAE, EBF ও FCD স্পর্শকত্রয় অঙ্কন করিবার ফলে DEF ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ ঃ $\because$ কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থিত কোণের দ্বিগুণ,

$\therefore$ $\angle AOB=2\angle ACB=2\times 60^\circ=120^\circ$ ($\because$ ΔABC সমবাহু, $\therefore$ ইহার প্রত্যেকটি কোণ 60)

আবার, $\because$ $\overline{EA}$ ও $\overline{EB}$-র প্রত্যেকে স্পর্শক এবং $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ ব্যাসার্ধ,

$\therefore$ $\angle OAE$ ও $\angle OBE$-র প্রত্যেকে 1 সমকোণ।

$\therefore$ $\angle OAE+\angle OBE=180^\circ$

$\therefore$ OAEB চতুর্ভুজের $\angle AOB+\angle OAE+\angle OBE$

$=120^\circ+180^\circ=300$;

আবার, OAEB চতুর্ভুজের $\angle AEB+\angle AOB+\angle OAE+\angle OBE$

$=4$ সমকোণ বা 360

$\therefore$ $\angle AEB=360^\circ-(\angle AOB+\angle OAE+\angle OBE)$

$=360^\circ-300^\circ=60^\circ$.

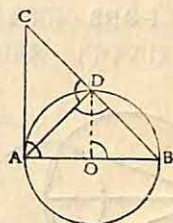
অর্থাৎ, $\angle DEF=60^\circ$.

অনুরূপে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle EFD$ ও $\angle FDE$-র প্রত্যেকে 60°.

$\therefore$ DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 3. কোন বৃত্তের ব্যাস $\overline{AB}$-র A-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $\overline{AC} \cong$ব্যাস $\overline{AB}$. $\overline{BC}$ বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, D, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু এবং $\overline{AD}$, $\overline{BC}$-র অর্ধেক।

দেওয়া আছে : $\overline{AB}$ বৃত্তের ব্যাস। A-বিন্দুতে স্পর্শক $\overline{AC} \cong$ব্যাস $\overline{AB}$. $\overline{BC}$ বৃত্তকে D-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : D, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু এবং $\overline{AD}$, $\overline{BC}$-র অর্ধেক।

অঙ্কন : $\overrightarrow{DO} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ টান। $\overrightarrow{DO}$, $\overline{AB}$-কে O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\angle ADB = 1$ সমকোণ ($\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ) $\therefore$ $\angle ADC$ও 1 সমকোণ হইবে।

এক্ষণে, ADB ও ADC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

অতিভুজ $\overline{AB} \cong$অতিভুজ $\overline{AC}$ (দেওয়া আছে), $\overline{AD}$ সাধারণ ;

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ $\therefore$ $\overline{DB} \cong \overline{DC}$; $\therefore$ D, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু।

আবার, ΔBAC-তে যেহেতু D, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু ও $\overrightarrow{DO} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, $\therefore$ O, $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু হইবে।

এক্ষণে, $\because$ $\overline{AB}$ একটি ব্যাস এবং O উহার মধ্যবিন্দু $\therefore$ O বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

$\because$ $\overrightarrow{DO} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, $\overline{AB}$ ভেদক $\therefore$ $\angle BOD \cong \angle BAC = 1$ সমকোণ

($\because$ $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ এবং $\overline{AC}$ স্পর্শক)

$\therefore$ $\angle DOA$ও 1 সমকোণ হইবে।

এক্ষণে, ΔDOA ও ΔDOB-র মধ্যে,

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$, $\overline{OD}$ সাধারণ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle DOA \cong$অন্তর্ভুক্ত $\angle DOB$.

$\therefore$ $\Delta DOA \cong \Delta DOB$, $\therefore$ $\overline{DA} \cong \overline{DB}$,

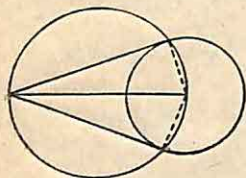
$\therefore$ $\overline{DA} \cong \overline{DB} \cong \overline{DC}$ $\therefore$ $\overline{DA} = \frac{1}{2}(\overline{DB} + \overline{DC}) = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

$\therefore$ $\overline{AD}$, $\overline{BC}$-র অর্ধেক।

অনুশীলনী 5

1. বৃত্তের দুইটি স্পর্শক বৃত্তের বাহিরে সাধারণ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, উহা যে কোন স্পর্শক এবং উক্ত সাধারণ বিন্দু ও কেন্দ্রবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণের দ্বিগুণ হইবে।

2. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু P হইতে উক্ত বৃত্তে $\overrightarrow{PA}$ ও $\overrightarrow{PB}$ দুইটি স্পর্শক টানা হইল। PO যোগ করিয়া দেখাও যে, $\overline{PO}$, P বিন্দুর স্পর্শ-জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

3. PQRS সামান্তরিকের বাহুগুলিকে স্পর্শ করিয়া উহার ভিতরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর যে, PQRS একটি রম্বস।

4. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তে দুইটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে। (পার্শ্ববর্তী চিত্র)।

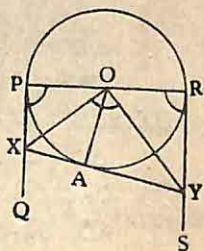
5. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে $\overrightarrow{PA}$ ও $\overrightarrow{PB}$ দুইটি স্পর্শক টানা হইল। $\overline{PO}$ বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

6. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা উক্ত বৃত্তের ব্যাস হইবে। [W. B. S. F. '54, W. B. S. F. (C) '69, '72]

7. বৃত্তের ব্যাস উহার প্রান্ত বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (C. U. 1918)

8. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের ভেদককে স্পর্শ করিয়া যাইবে। (C. U. 1935)

9. বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিকের বিপরীত বাহু দুইটি কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

10. $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{RS}$, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক। তৃতীয় একটি স্পর্শক $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{RS}$-কে যথাক্রমে X ও Y-বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\angle XOY = 1$ সমকোণ।

[**ইঙ্গিত :** $\angle OXA = \frac{1}{2}\angle PXA$, $\angle OYA = \frac{1}{2}\angle RYA$;

এক্ষণে, PXYR চতুর্ভুজের চারিটি কোণ = 4 সমকোণ

এবং $\angle RPX + \angle PRY = 2$ সমকোণ। এক্ষণে, $\angle PXY + \angle RYX = 2$ সমকোণ;

$\therefore$ $\angle OXA + \angle OYA = \frac{1}{2}(\angle PXA + \angle RYA) = \frac{1}{2}(\angle PXY + \angle RYX)$;

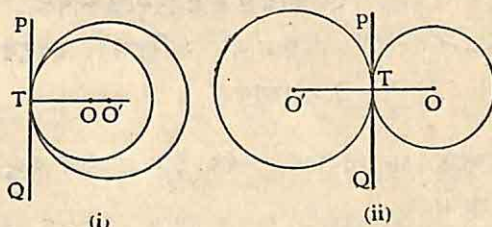
অর্থাৎ, $\angle OXY + \angle OYX = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ = 1 সমকোণ।

$\therefore$ $\angle XOY = 1$ সমকোণ]।

উপপাদ্য 37

যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে, তবে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্র দুইটির মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে।

(If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.)

(i) (ii)

দেওয়া আছে : O, O'-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : O, O' এবং T একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : T বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{PQ}$ সাধারণ স্পর্শকটি অঙ্কন কর। T বিন্দুর সহিত O এবং O' যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ $\overline{OT}$, $\overline{O'T}$ ব্যাসার্ধ, এবং $\overleftrightarrow{PQ}$, T বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক।

$\therefore$ T বিন্দুতে $\angle PTO$ এবং $\angle PTO'$-এর প্রত্যেকটি সমকোণ।

$\therefore$ $\overline{OT}$ এবং $\overline{O'T}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং O, O' এবং T একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

চিত্র (ii) হইতে—

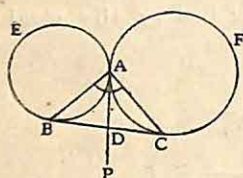
$\angle PTO + \angle PTO' = 2$ সমকোণ ($\because$ প্রত্যেকে 1 সমকোণ);

$\therefore$ $\overline{OT}$ এবং $\overline{O'T}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত;

সুতরাং, O, O' এবং T একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. দুইটি বৃত্ত যদি পরস্পর অন্তঃস্পর্শী হয়, তবে উহাদের কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব, উহাদের ব্যাসার্ধ দুইটির অন্তরফলের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত 2. দুইটি বৃত্ত যদি পরস্পর বহিঃস্পর্শী হয়, তবে উহাদের কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব, উহাদের ব্যাসার্ধ দুইটির যোগফলের সমান।

উদাহরণ। দুইটি বৃত্ত A-বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শী হইয়াছে। একটি সরল-রেখা ঐ বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BAC = 1$ সমকোণ। (W. B. C. S. 1967)

দেওয়া আছে : দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শী হইয়াছে। $\overline{BC}$ ঐ বৃত্তদ্বয়ের যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle BAC = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন : A-বিন্দুতে $\overrightarrow{AP}$ সাধারণ স্পর্শক টান। মনে কর, উহা $\overline{BC}$-র D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : BAE বৃত্তের $\overrightarrow{AP}$ ও $\overline{BC}$ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর বহিঃস্থ বিন্দু D-তে মিলিত হইয়াছে। $\therefore$ $\overline{DA} \cong \overline{DB}$; অনুরূপে, $\overline{DA} \cong \overline{DC}$.

$\therefore$ ΔDAB ও ΔDAC-র যথাক্রমে $\angle BAD \cong \angle ABD$ এবং $\angle CAD \cong \angle ACD$. $\therefore$ $\angle BAD + \angle CAD = \angle ABD + \angle ACD$;

অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$;

$\therefore$ $\angle BAC + \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

(উভয় পক্ষে $\angle BAC$ যোগ করিয়া)

$\therefore$ $2\angle BAC = 2$ সমকোণ ; $\therefore$ $\angle BAC = 1$ সমকোণ।

অনুশীলনী 6

1. O, O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর P বিন্দুতে বহিঃস্পর্শী হইয়াছে। OO′ যোগ করিয়া উভয় দিকের পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত করায়, উহা যথাক্রমে O-কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তকে A বিন্দুতে এবং O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে B-বিন্দুতে ছেদ করিল। A হইতে O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{XY}$ দুইটি স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ কর যে, P-বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শক $\overleftrightarrow{XY}$-এর সমান্তরাল।

2. O, O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P-বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। একটি সরলরেখা O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে A-বিন্দুতে এবং O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে B-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। Q, $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু। যদি Q-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{AQ}$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P-এর মধ্য দিয়া যায়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ}$ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

3. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে। ছোট বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং বড় বৃত্তটির কেন্দ্র O′. POO′ যোগ করিয়া বর্ধিত করায় উহা বড় বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Q হইতে ছোট বৃত্তের M ও N বিন্দুতে $\overrightarrow{QM}$ ও $\overrightarrow{QN}$ দুইটি স্পর্শক টানা হইল। পুনরায় $\overrightarrow{QM}$ ও $\overrightarrow{QN}$ বড় বৃত্তটির পরিধিকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{MX} \cong \overline{NY}$.

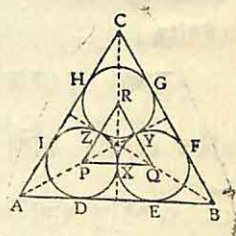
4. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের $\overline{AB}$ জ্যা এর মধ্যবিন্দু D. OD যোগ করিয়া বর্ধিত কর এবং বর্ধিতাংশ হইতে $\overline{OD}$-র সমান করিয়া $\overline{DP}$ অংশ কাটিয়া লও। যদি $\overline{OD} \cong \overline{AD}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{OA}$ বা বর্ধিত $\overline{OA}$-এর উপর অবস্থিত যে-কোন কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের এবং প্রদত্ত বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক $\overline{AP}$.

5. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে X, Y এবং Z বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। $\overline{AB}$, P ও Q-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে; $\overline{BC}$, Q ও R কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে এবং $\overline{CA}$, R ও P-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে H ও I বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া ABC ত্রিভুজটি উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[**ইঙ্গিত:** ∵ বহিঃস্পর্শী যে-কোন দুই বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ইহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল।

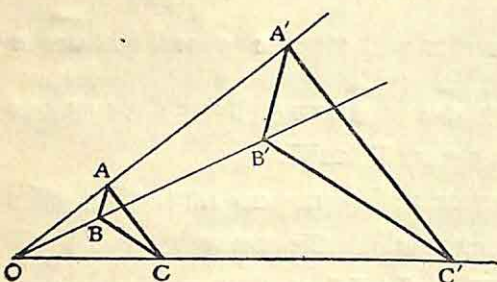
∴ $\overline{PQ} = 2 \times$ ব্যাসার্ধ, $\overline{QR} = 2 \times$ ব্যাসার্ধ এবং $\overline{RP} = 2 \times$ ব্যাসার্ধ। ∵ বৃত্ত তিনটি সমান দেওয়া আছে, ∴ উহাদের ব্যাসার্ধ সমান।

∴ $\overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RP}$ ∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ∴ $\angle PQR \cong \angle QRP \cong \angle RPQ = 60°$.

এক্ষণে, $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{BC} \parallel \overline{QR}$ এবং $\overline{CA} \parallel \overline{RP}$ দেখাও……ইত্যাদি।]

চতুর্থ অধ্যায়

সদৃশ-রূপান্তর—সামতলিক আকৃতির সাদৃশ্য

4.1. সূচনা :

তোমরা অনেকেই ছায়াছবি দেখিয়াছ। রূপালী পর্দায় এই চলমান ছায়াছবি কিভাবে প্রতিফলিত হয় ? প্রথমে 35 মিলিমিটার ফিল্মে ছবিগুলিকে তোলা হয়। তারপর আলোকরশ্মি-প্রক্ষেপক যন্ত্রের (Projector) মাধ্যমে ফিল্মগুলির মধ্য দিয়া আলো সঞ্চালিত করিলে বহুগুণ বর্ধিত হইয়া ছবিগুলির অভিক্ষেপণ (Projection) আমরা রূপালী পর্দায় দেখিতে পাই। একটি ছোট ছবি কিভাবে বহুগুণ বর্ধিত হইতেছে ? উপরের চিত্রটির অঙ্কন প্রণালী লক্ষ্য কর।

চিত্র 1

উদা. 1. ABC একটি ত্রিভুজ। মনে কর, O ইহার বহিঃস্থ যে কোন একটি বিন্দু। O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ রশ্মিগুলি (rays) অঙ্কন কর।* ইহাদের উপরে A′, B′, C′ বিন্দুগুলি এমনভাবে লও যাহাতে $\overline{OA'} = 3\overline{OA}$, $\overline{OB'} = 3\overline{OB}$, $\overline{OC'} = 3\overline{OC}$ হয়। লক্ষ্য কর, $\Delta A'B'C'$, ΔABC অপেক্ষা আকারে 3গুণ বর্ধিত হইয়াছে।

*সংজ্ঞা : কোনও একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে একই দিকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত রেখাকে **রশ্মি** (ray) বলে। উপরোক্ত চিত্রে O নির্দিষ্ট বিন্দু। $\overrightarrow{OA'}$ বা $\overrightarrow{OC'}$, O হইতে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত হইয়াছে। এখানে $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OC'}$ দুইটি রশ্মি।

4.2. আকৃতির সাদৃশ্য ও উহাদের গুণাবলী :

উপরোক্ত চিত্রে, নিম্নলিখিত বিশেষত্বগুলি পরীক্ষা কর :

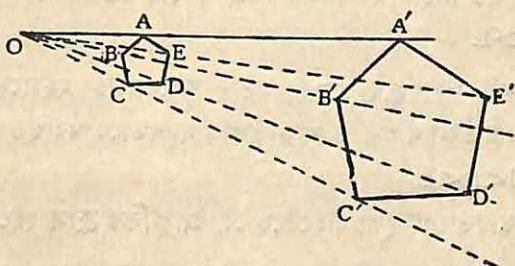
1. ABC ও A′B′C′ ত্রিভুজদ্বয়ের কোণগুলি মাপ। লক্ষ্য কর, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$

2. লক্ষ্য কর, যুগ্ম রেখাগুলি $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$; $\overline{CA}$, $\overline{C'A'}$ পরস্পর সমান্তরাল।

3. ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের মাপ এবং লক্ষ্য কর যে,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}=3$$

উদা. 2. $\overline{OA'}=2\overline{OA}$, $\overline{OB'}=2\overline{OB}$, $\overline{OC'}=2\overline{OC}$ ধরিয়া অপর একটি চিত্র অঙ্কন কর। উপরোক্ত 1, 2, 3, পদ্ধতিগুলির গুণাবলী এই চিত্রের ক্ষেত্রে পরীক্ষা কর।

উদা. 3. ABCDE একটি পঞ্চভুজ। তিনগুণ বর্ধিতাকারে ইহার চিত্র অঙ্কন কর। (নিম্নে চিত্রটি দেওয়া হইল।) এই পঞ্চভুজ অঙ্কনের ক্ষেত্রেও উপরোক্ত 1, 2, 3 পদ্ধতিগুলির গুণাবলী পরীক্ষা কর।

চিত্র 2

উপরোক্ত তিনটি উদাহরণ আলোচনার সাহায্যে কোন আকৃতির বর্ধিতকরণ (enlargement) সম্বন্ধীয় নিম্নলিখিত গুণাবলী লক্ষ্য করা যায়:

1. অনুরূপ বাহুগুলি সমান্তরাল।

ABC ও A'B'C' ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলি সমান্তরাল; অর্থাৎ, $\overline{AB}\|\overline{A'B'}$; $\overline{BC}\|\overline{B'C'}$; $\overline{CA}\|\overline{C'A'}$. আবার পঞ্চভুজের ক্ষেত্রেও $\overline{AB}\|\overline{A'B'}$; $\overline{BC}\|\overline{B'C'}$ ইত্যাদি।

2. অনুরূপ কোণগুলি সর্বসম।

ত্রিভুজদ্বয়ের জন্য $\angle A\cong\angle A'$; $\angle B\cong\angle B'$; $\angle C\cong\angle C'$ এবং পঞ্চভুজের জন্য $\angle A\cong\angle A'$; $\angle B\cong\angle B'$ ইত্যাদি।

3. অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত পরস্পর সমান।

ত্রিভুজদ্বয়ের জন্য $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$

এবং পঞ্চভুজদ্বয়ের জন্য $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}}$.

আকৃতির বর্ধিতকরণ বিষয়ে উপরোক্ত 2 ও 3 নং সর্ত পূরণ হইলে আকৃতিদ্বয়কে **সদৃশ** (similar) বলে এবং 1 নং সর্ত পূরণ হইলে উহাদের **সদৃশভাবে অবস্থিত** (similarly situated) বলা হয়।

উদাহরণ 1 এবং 3-এ অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত 3 : 1, এবং উদাহরণ 2-এ উহাদের অনুপাত 2 : 1. এখন, আমরা এই অনুপাতকে যদি K : 1 বলি [**K**-কে আমরা **বর্ধিতকরণ উৎপাদক** (Enlargement Factor) বলি] তাহা হইলে, K-র বিভিন্ন মানের জন্য নিম্নলিখিত তিনটি ভিন্ন অবস্থার উদ্ভব হয়।

(*i*) যখন $K>1$.

উপরোক্ত তিনটি উদাহরণে $K>1$ সর্তটি আলোচিত হইয়াছে। এইক্ষেত্রে প্রতিটি **দৈর্ঘ্যের বর্ধিতকরণ** হয়, ও আকৃতিগুলি সদৃশভাবে অবস্থিত হয়।

(*ii*) যখন $0<K<1$.

এইক্ষেত্রে পরিষ্কারভাবেই বুঝা যাইতেছে যে, **আকৃতির হ্রাস** হইতেছে।

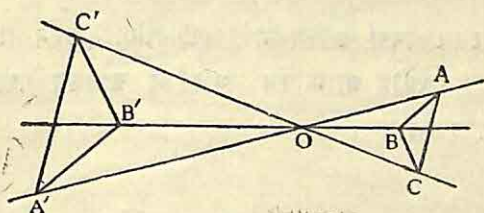
উদা. 4. A'B'C'D'E' একটি পঞ্চভুজ আঁক, এখন উহার বাহিরে কোন বিন্দু O লও। O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OD'}$, $\overrightarrow{OE'}$ রশ্মিগুলি আঁক। ইহাদের উপরে A, B···ইত্যাদি বিন্দুগুলি এইভাবে লও যাহাতে $\overline{OA}=K.\overline{OA'}$, $\overline{OB}=K.\overline{OB'}$,···ইত্যাদি যেখানে $K=\frac{1}{3}$. লক্ষ্য কর, ABCDE পঞ্চভুজটি A'B'C'D'E' পঞ্চভুজটির আকারের তুলনায় $\frac{2}{3}$ হ্রাস পাইয়াছে। [চিত্র 2]

ঐ O-বিন্দুকে আমরা **বর্ধিতকরণ কেন্দ্র** (Centre of Enlargement) বলি।

উদা. 5. $K=\frac{1}{2}$ ধরিয়া উদাহরণ 4-কে পুনরায় আঁক।

উপরোক্ত উদাহরণ 4 ও 5 হইতে লক্ষ্য করা গেল যে, যখন $0<K<1$ তখনও আকৃতিগুলি সদৃশ ও O-বিন্দুর (বর্ধিতকরণ কেন্দ্রের) একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়। এই ক্ষেত্রে শুধুমাত্র দৈর্ঘ্যগুলির হ্রাস ঘটে।

(*iii*) $K<0$.

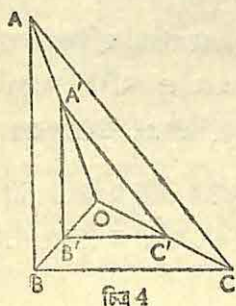
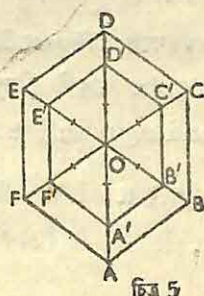
K-র মান ঋণাত্মক হইলে, আকৃতিগুলি কিভাবে রূপান্তরিত হইবে? চিত্র-3 লক্ষ্য কর। K= −2 ধরিলে $\overline{OA'} = -2\overline{OA}$, $\overline{OB'} = -2\overline{OB}$, $\overline{OC'} = -2\overline{OC}$ হইবে। এই ক্ষেত্রে $\overline{OA'}$, $\overline{OA}$ এর বিপরীত দিক্‌কে নির্দেশ করিতেছে; অর্থাৎ A এবং A′ বিন্দু O-বিন্দুর (অর্থাৎ বর্ধিতকরণ কেন্দ্রের) বিপরীত দিকে অবস্থিত। B′ ও C′ বিন্দুর অবস্থান স্থির করিয়া চিত্রটি সম্পূর্ণ আঁক। চিত্রে অনুরূপ

চিত্র 3

বাহুগুলির অবস্থান কিরকম দেখা যাইতেছে? লক্ষ্য কর, K ঋণাত্মক হওয়ায় $\overline{AB}$ বাহুর যে দিক, অনুরূপ বাহু A′B′-এর দিক তাহার বিপরীত।

সুতরাং K<0 হইলে, আকৃতি দুইটি সদৃশভাবে অবস্থিত হয় কিন্তু অনুরূপ বাহুগুলি পরস্পর বিপরীত দিক্‌কে নির্দেশ করে।

নিম্নোক্ত চিত্র দুইটিতে (চিত্র 4 ও চিত্র 5) বর্ধিতকরণ কেন্দ্র (O) চিত্রের **অভ্যন্তরে অবস্থিত** এবং বর্ধিতকরণ উৎপাদক যদি K হয়, আবার যদি চিত্র 4-এ $K = \frac{1}{2}$ হয় তবে,

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

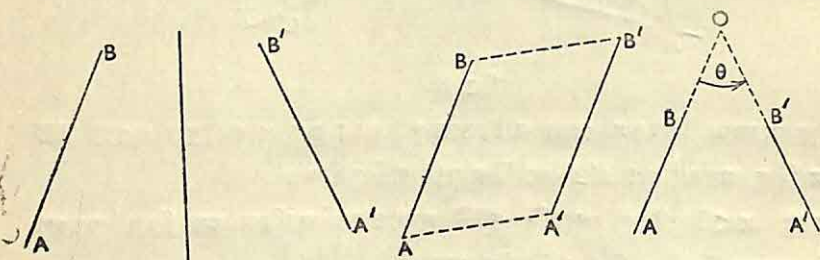
চিত্র 5-এ, $\dfrac{A'B'C'D'E'F' \text{ ষড়ভুজ}}{ABCDEF \text{ ষড়ভুজ}} =$ কত?

চিত্র 4 চিত্র 5

4.3. ত্রিভুজের সদৃশ হইবার সর্ত :

যে কোন দুইটি আকৃতি সদৃশ হইবার সর্ত হইল,

1. উহাদের অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সর্বসম, এবং
2. উহাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান।

4.4. সদৃশ রূপান্তর :

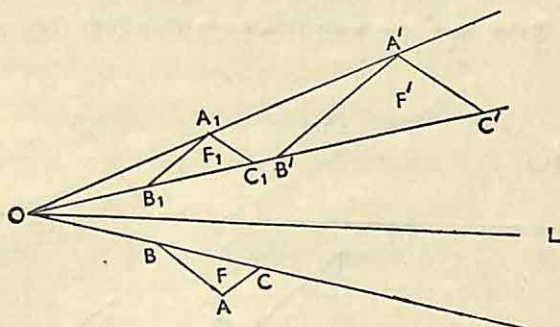
পূর্ববর্তী পাঠ্যসূচীতে তোমরা প্রতিফলন (reflection), চলন (translation) ও ঘূর্ণন (rotation) সম্বন্ধীয় জ্যামিতিক আকৃতির রূপান্তর সম্বন্ধে শিখিয়াছ। নিম্নলিখিত চিত্রগুলি লক্ষ্য কর :

প্রতিফলন, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ চলন, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ঘূর্ণন, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

উপরোক্ত রূপান্তরগুলিকে **সমমিতিক রূপান্তর** (isometric transformation) বলে। এই ধরনের রূপান্তরে জ্যামিতিক কোনও চিত্রের আকার (shape) বা আয়তনের (size) পরিবর্তন ঘটে না, অর্থাৎ ইহাদের সর্বসমতা বজায় থাকে। কিন্তু বর্ধিতকরণে তোমরা লক্ষ্য করিয়াছ যে—

(1) জ্যামিতিক আকৃতি সদৃশ ও সদৃশভাবে অবস্থিত থাকে। (আকার অক্ষুন্ন থাকিলেও আয়তনের হ্রাস বা বৃদ্ধি ঘটে)।

(2) কোনও বর্ধিতকরণকে $\overline{OP'} = K.\overline{OP}$ সম্বন্ধদ্বারা সূচিত করা যায় যেখানে, P চিত্রের উপরিস্থিত যে কোনও একটি বিন্দু এবং P′ বর্ধিত আকৃতির উপরিস্থিত অনুরূপ বিন্দু (corresponding point) ও K বর্ধিতকরণ উৎপাদক।

(3) $\overline{OP'} = K\overline{OP}$ সম্বন্ধে $K = 1$ বা -1 হইলে চিত্র ও উহার বর্ধিতাকার সর্বসম হইবে। যখন $K = -1$, চিত্রটির বর্ধিতাকার চিত্রটির O বিন্দুর সাপেক্ষে অর্ধঘূর্ণন (half turn) হইবে।

উপরোক্ত আলোচনায় ইহা বুঝা গেল যে, বর্ধিতকরণ দ্বারা সদৃশ-রূপান্তর করা সম্ভব। কিন্তু সব সদৃশ-রূপান্তর শুধুমাত্র বর্ধিতকরণ দ্বারা সম্ভব নহে। নিম্নের চিত্রটি লক্ষ্য কর :

এই চিত্রে F_1, F-এর প্রতিফলন (OL প্রতিফলন অক্ষ) এবং F', F_1-এর বর্ধিত আকার। O বর্ধিতকরণ কেন্দ্র। আরও লক্ষ্য কর যে, F ও F' চিত্র সদৃশ।

ইহার দ্বারা বুঝা গেল যে, শুধুমাত্র বর্ধিতকরণ দ্বারা সদৃশ-রূপান্তর সম্ভব নহে। বস্তুতঃ **সদৃশ-রূপান্তর** সমমিতিক রূপান্তর (isometric transformation—প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন) ও বর্ধিতকরণের (enlargement) মিলিত ফল। যে কোনও সদৃশ চিত্রই এই দুই রূপান্তরকে সম্মিলিত করিয়া পাওয়া যাইবে। অর্থাৎ প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণনের এক বা একাধিক রূপান্তর ও বর্ধিতকরণের সম্মিলিত ফলে সদৃশ-রূপান্তর পাওয়া যায়।

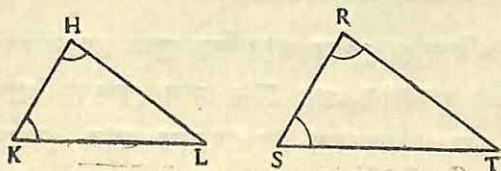
দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হইবার সর্ত :

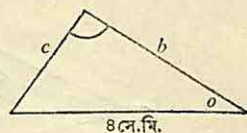
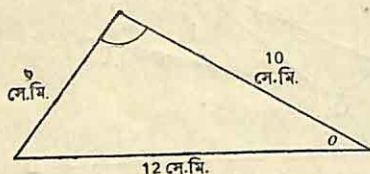
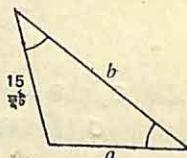
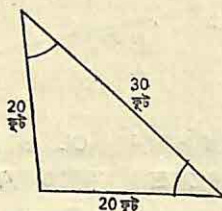
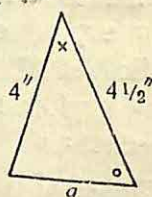
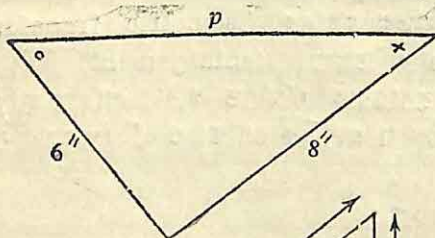
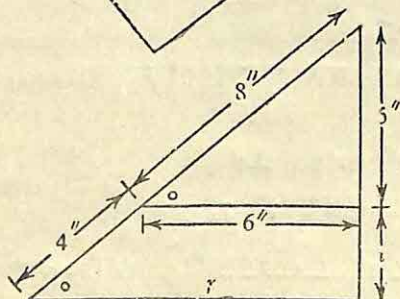
1. যে-কোন দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম (তাহা হইলেই ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হইবে) ; **অথবা**

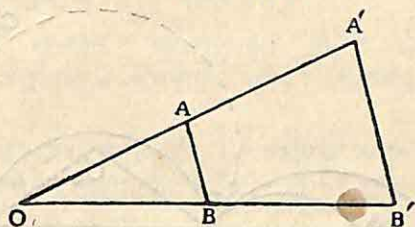
2. উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

অনুশীলনী 7

1. নিম্নের চিত্রে $\angle H \cong \angle R$; $\angle K \cong \angle S$. ত্রিভুজদ্বয় কি সদৃশ ?

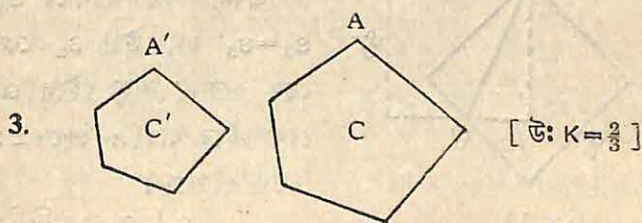
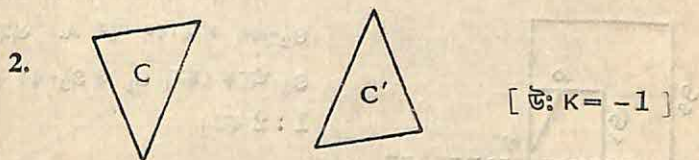
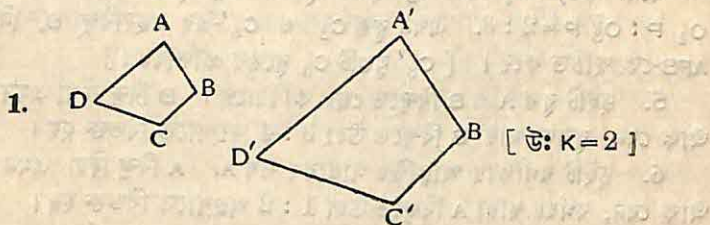
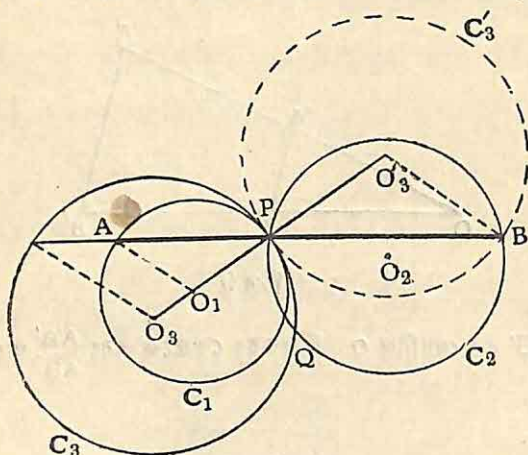
চিত্র ৮

যদি $\overline{HK}=7$ সে. মি., $\overline{RS}=8$ সে. মি. এবং $\overline{RT}=12$ সে. মি. হয়, তাহা হইলে $\overline{HL}=$ কত ?

নিম্নের 2—5 অনুশীলনীতে দুইটি করিয়া ত্রিভুজের চিত্র আছে। পরীক্ষা করিয়া দেখা যে, উহারা সদৃশ এবং অক্ষর চিহ্নিত বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4.4. আমরা দেখিয়াছি, কোন আকৃতির হ্রাস বা বর্ধিতকরণ সম্ভব হয় যদি O-বিন্দুটির অবস্থান এবং K-র মান দেওয়া থাকে অর্থাৎ, বর্ধিতকরণ কেন্দ্র এবং বর্ধিতকরণ উৎপাদকের মান দেওয়া থাকে। বিপরীতক্রমে, যদি দুইটি সমান্তরাল রেখাংশ দেওয়া থাকে, তবে O-বিন্দুটি এবং K-এর মান নির্দিষ্ট করা যায়।

নিম্নোক্ত চিত্রে, $\overline{AB}$ এবং $\overline{A'B'}$ দেওয়া আছে।

চিত্র 9

$\overline{AA'}$ ও $\overline{BB'}$-এর ছেদবিন্দু O, বর্ধিতকরণ কেন্দ্রকে এবং $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ অনুপাতটি K-র মান নির্দিষ্ট করে।

অনুশীলনী 8

1. নিম্নলিখিত অনুশীলনীতে যুগ্ম আকৃতিগুলির ক্ষেত্রে O বিন্দু এবং K-র মান নির্ণয় কর।

4. দুইটি বৃত্ত C_1 ও C_2, P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দু দিয়া এমন একটি

চিত্র 10

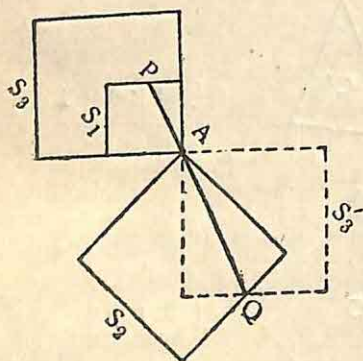
সরলরেখা APB আঁক যেন বৃত্তদ্বয় দ্বারা P বিন্দুতে উহা 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

মনে কর, C_1 ও C_2 দুইটি বৃত্ত। C_3 বৃত্তটি এইভাবে আঁক যাহাতে $O_1P : O_3P = 2 : 3$. এখন বৃত্ত C_2 ও C_3'-এর ছেদবিন্দু B, নির্ণেয় রেখাংশ APB-কে সূচিত করে। [C_3' বৃত্তটি C_3 বৃত্তের প্রতিবিম্ব।]

5. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। B বিন্দু দিয়া এমন একটি রেখা আঁক যেন, বৃত্তদ্বয় দ্বারা B বিন্দুতে উহা 3 : 4 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

6. দুইটি বর্গাকার আকৃতির সাধারণ শীর্ষ A. A বিন্দু দিয়া এমন একটি রেখা আঁক যেন, বর্গদ্বয় দ্বারা A বিন্দুতে উহা 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

চিত্র 11

এখানে প্রদত্ত বর্গাকার আকৃতি S_1 এবং S_2-এর সাধারণ শীর্ষ A. এমন একটি বর্গ S_3 আঁক যেন, S_1 ও S_3-এর বাহুর অনুপাত 1 : 2 হয়।

এখন, চিত্র অনুসারে S_3' আঁক যেন $S_3 = S_3'$ হয়, উহা S_2 কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে QAP-ই উদ্দিষ্ট রেখা হইবে, যাহা A-বিন্দুতে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে।

[S_3', S_3-র প্রতিবিম্ব]

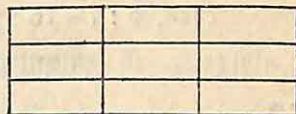
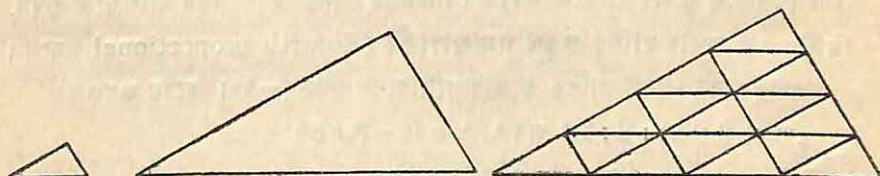
4.5. কোন দুইটি সদৃশ আকৃতির অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত $1 : K$ হইলে উহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $1 : K^2$ হইবে।

তোমরা পূর্বেই দেখিয়াছ (অনুচ্ছেদ 4.3, বিশেষ দ্রষ্টব্য দেখ) দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ মধ্যমাদ্বয়ের অনুপাত সমান। ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতার ক্ষেত্রেও ইহা প্রযোজ্য।

বস্তুতঃ সদৃশ ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত যে কোনও অনুরূপ রেখাংশের অনুপাত উহাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাতের সমান। নিম্নের দুইটি উদাহরণ পরীক্ষা কর।

উদা. 1. [চিত্র 12] এখানে দুইটি সদৃশ আয়তাকার আকৃতি দেওয়া আছে। দ্বিতীয়টির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথমটির তিনগুণ। তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত বাহির কর।

চিত্র 12

উদা. 2. [চিত্র 13] এখানে দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ দেওয়া আছে। উহাদের ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $1 : 4$. তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত বাহির কর।

(i)

(ii)

চিত্র 13 চিত্র 14

উদাহরণ 1-এ ক্ষেত্রফলের অনুপাত $1 : 9$. উপরের চিত্রে [চিত্র 14 (*i*)] লক্ষ্য কর, বড় আয়তাকার আকৃতিটি ছোটটির 9 গুণ।

উদাহরণ 2-এ ক্ষেত্রফলের অনুপাত $1 : 16$. চিত্র 14 [*ii*] পরীক্ষা কর।

পঞ্চম অধ্যায়

সমানুপাতী-ভাগ (Proportional Division)

5.1. অনুপাত (Ratio) :

অনুপাত এমন একটি শুদ্ধ সংখ্যা যাহা দ্বারা বুঝা যায় যে, দুইটি সমজাতীয় রাশির মধ্যে পরিমাণগত বিচারে একটি অপরটির অথবা প্রথমটি দ্বিতীয়টির কতগুণ বা কত অংশ।

5 ও 7-এর অনুপাতকে সাধারণতঃ $5 \div 7$ বা $5 : 7$—এইভাবে লেখা হইয়া থাকে।

অনুপাতের প্রথম রাশিটিকে **পূর্বরাশি** (antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশিটিকে **উত্তররাশি** (consequent) বলা হয়।

5.2. সমানুপাত (Proportion) :

চারিটি রাশি যদি এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান, তবে ঐ রাশিগুলি একটি সমানুপাত গঠন করে।

যেমন, $5 : 7 = 15 : 21$ অথবা, $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$,

সাধারণতঃ এই সমানুপাতটিকে $5 : 7 : : 15 : 21$—এইভাবে লেখা হইয়া থাকে।

সমানুপাতী রাশিগুলির প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **প্রান্তীয় রাশ** (Extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্যক** (means) বলা হয়। চতুর্থ রাশিটিকে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে।

সমানুপাতী চারিটি রাশির প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল = মধ্যকদ্বয়ের গুণফল।

যেমন, $2 : 3 : : 8 : 12$ অর্থাৎ, $2 \times 12 = 3 \times 8$।

এক্ষণে, যদি $\frac{\text{প্রথম রাশি}}{\text{দ্বিতীয় রাশি}} = \frac{\text{দ্বিতীয় রাশি}}{\text{তৃতীয় রাশি}}$ হয়, তবে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিগুলিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (Continued proportion) বলা হয়।

আবার যেহেতু, মধ্যকদ্বয়ের গুণফল = প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল,

অর্থাৎ, **(দ্বিতীয় রাশি)^2 = প্রথম রাশি × তৃতীয় রাশি**

যেমন, $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ এখানে, $4^2 = 8 \times 2$

পূর্বোক্ত উদাহরণে, 4, 8 ও 2-এর **মধ্য সমানুপাতী** (mean proportional) এবং 2 কে 8 ও 4-এর **তৃতীয় সমানুপাতী** (third proportional) বলে।

এক্ষণে, সমানুপাতী রাশি চারিটিকে যদি a, b, c ও d ধরা হয়, তবে ঐগুলিকে আমরা—

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ এইভাবে লিখি।

অনুপাত সম্বন্ধে নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় বিষয়গুলি মনে রাখিবে :

1. **ব্যস্ত-প্রক্রিয়া** (Invertendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ হইবে।

2. **একান্তর-প্রক্রিয়া** (Alternendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ হইবে।

3. **যৌগিক-প্রক্রিয়া** (Componendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ হইবে।

4. **ভাগ-প্রক্রিয়া** (Dividendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ হইবে।

5. **যোগ ও ভাগ-প্রক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ হইবে।

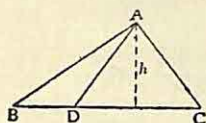
6. **বজ্র-গুণন-প্রক্রিয়া** (Cross-multiplication) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $ad=bc$ হইবে।

7. **সংযোজন-প্রক্রিয়া** (Addendo) :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$......ইত্যাদি হইলে,

প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots \text{ইত্যাদি}}{b+d+f+h+\cdots\cdots \text{ইত্যাদি}}$ হইবে।

* **উপপাদ্য :** যদি ΔABC-র $\overline{BC}$ ভূমির উপর D যে-কোন বিন্দু হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

দেওয়া আছে : ΔABC-র $\overline{BC}$ ভূমির উপর D একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$

অঙ্কন : A হইতে $\overline{BC}$ ভূমির উপর h লম্ব টান।

প্রমাণ : $\Delta ABD=\frac{1}{2}\overline{BD}.h$

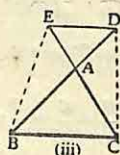
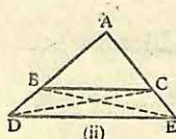
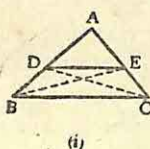
অনুরূপে, $\Delta ACD=\frac{1}{2}\overline{DC}.h$

$$\therefore \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BD}\ h}{\frac{1}{2}\overline{DC}.h}$$

$$=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

উপপাদ্য 38

যদি ত্রিভুজের কোন বাহুর সমান্তরাল করিয়া কোন সরলরেখা টানা যায়, তবে অপর বাহুদ্বয় উক্ত সরলরেখা দ্বারা সমানুপাতে বিভক্ত হইবে।

(If a line is drawn parallel to one side of a triangle, the other two sides are divided proportionally.)

দেওয়া আছে : ΔABC-র $\overleftrightarrow{DE} \| \overline{BC}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$.

প্রমাণ : $\frac{\Delta EAD}{\Delta EBD}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ এবং $\frac{\Delta DAE}{\Delta DCE}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ (পূর্বোক্ত প্রমাণ অনুসারে)

এক্ষণে, ΔADE সাধারণ এবং ΔEBD ও ΔDCE ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান

($\because$ একই ভূমি $\overline{DE}$ এবং $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$)

$$\therefore \frac{\Delta EAD}{\Delta EBD}=\frac{\Delta DAE}{\Delta DCE}$$

$$\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. (*a*) $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$, (*b*) $\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}$

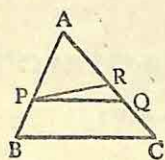
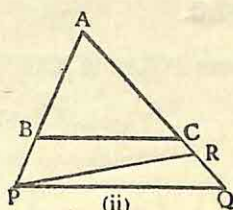
[$\because \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ $\therefore \frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{\overline{EC}}$ (যোগ-প্রক্রিয়া দ্বারা)

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$ এবং $\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}$ (ব্যস্ত-প্রক্রিয়া দ্বারা)

অনুসিদ্ধান্ত 2. যদি কতকগুলি ভেদক কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা ছিন্ন হয়, তবে ভেদকগুলির ছিন্ন অংশসমূহ পরস্পর সমানুপাতী হইবে।

উপপাদ্য 39

যদি কোন সরলরেখা কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে উহা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।

(If a straight line divides two sides of a triangle proportionally, then it is parallel to the third side.)

দেওয়া আছে ঃ $\overleftrightarrow{PQ}$, ΔABC-র $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-কে P ও Q বিন্দুতে [চিত্র (i)] বা বর্ধিত $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে [চিত্র (ii)] সমানুপাতে বিভক্ত করিয়াছে ; অর্থাৎ, $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}$.

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$.

প্রমাণ ঃ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$ না হইলে মনে কর, $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overline{BC}$, এবং R, $\overline{AC}$ বাহুর উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু, যাহা কেবল Q বিন্দুতে মিলিত হইবে না।

$\because$ $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overline{BC}$ $\therefore$ $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AR}}{\overline{CR}}$

আবার, $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}$ (দেওয়া আছে) ;

$\therefore$ $\frac{\overline{AR}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}$.

$\therefore$ R ও Q, $\overline{AC}$-র উপর দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু (কল্পনা)। কিন্তু AC-সরলরেখা ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে সমানুপাতী হইতে পারে না।

$\therefore$ $\frac{\overline{AR}}{\overline{CR}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}$ একমাত্র এই কারণেই সম্ভব হইতে পারে, যদি R বিন্দু Q বিন্দুতে মিলিত হয়। $\therefore$ R বিন্দু Q বিন্দুতে অবশ্যই মিলিত হইবে।

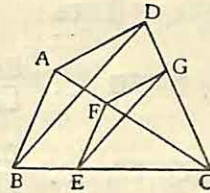
এক্ষণে, $\because$ $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overline{BC}$ (কল্পনা),

এবং $\because$ R বিন্দু Q বিন্দুতে মিলিত হয় (প্রমাণিত)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$.

এই উপপাদ্যটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যেও প্রমাণের চেষ্টা কর।

(চিত্র উপ. 38-এর ন্যায়।)

উদা. 1. $\overline{BC}$ সাধারণ ভূমির উপর ও উহার একই পার্শ্বে ABC ও DBC দুইটি ত্রিভুজ। $\overline{BC}$ র উপর যে কোন বিন্দু E. E হইতে $\overline{BA}$ ও $\overline{BD}$-র সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা যথাক্রমে $\overline{AC}$-কে F ও $\overline{DC}$ কে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{FG} \| \overline{AD}$. [G. U. 1951]

দেওয়া আছে : $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ সাধারণ ভূমি $\overline{BC}$-র উপর ও উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত। E, $\overline{BC}$-র উপর যে-কোন বিন্দু। $\overline{EF} \| \overline{BA}$ এবং $\overline{EG} \| \overline{BD}$. F ও G বিন্দু যথাক্রমে $\overline{AC}$ ও $\overline{DC}$ র উপর অবস্থিত।

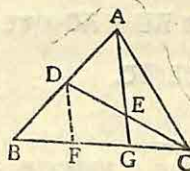
প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{FG} \| \overline{AD}$.

প্রমাণ : $\because$ $\triangle CAB$-তে, $\overline{EF} \| \overline{BA}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$

আবার, $\because$ $\triangle CDB$-তে, $\overline{EG} \| \overline{BD}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{DG}}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{DG}}$; এক্ষণে $\triangle CAD$-তে $\because$ $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{DG}}$

$\therefore$ $\overline{FG} \| \overline{AD}$.

উদা. 2. $\triangle ABC$-র $\overline{AB}$-বাহুর মধ্যবিন্দু D. E-বিন্দুতে $\overline{CD}$ সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। যদি $\overline{AE}$ বর্ধিত হইয়া $\overline{BC}$-বাহুর G-বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{GC} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. [W. B. S. F. (Addl.) 1972]

দেওয়া আছে : $\triangle ABC$-র $\overline{AB}$-বাহুর মধ্যবিন্দু D.

E, $\overline{CD}$ র মধ্যবিন্দু। বর্ধিত $\overline{AE}$, $\overline{BC}$-র G বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে: $\overline{GC} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

অঙ্কন: D বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AG}$ র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান। মনে কর, উহা $\overline{BC}$-কে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ: $\because$ ΔBAG-তে, $\overline{DF} \| \overline{AG}$ $\therefore$ $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FG}}$;

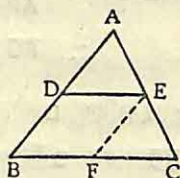
আবার, $\because$ ΔCDF-এ, $\overline{EG} \| \overline{DF}$, $\therefore$ $\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GC}}$;

কিন্তু, $\because$ $\overline{BD} \cong \overline{DA}$ $\therefore$ $\overline{BF} \cong \overline{FG}$;

আবার, $\because$ $\overline{DE} \cong \overline{EC}$ $\therefore$ $\overline{FG} \cong \overline{GC}$;

$\therefore$ $\overline{BF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GC}$

$\therefore$ $\overline{GC} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

উদা. 3. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

দেওয়া আছে: ΔABC র $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$-বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

প্রমাণ করিতে হইবে: $\overline{DE} \| \overline{BC}$.

অঙ্কন: E-বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান। মনে কর, উহা $\overline{BC}$-র F-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : $\because$ $\overleftrightarrow{EF} \| \overline{AB}$, $\therefore$ $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}$;

কিন্তু, $\because$ $\overline{CE} \cong \overline{EA}$, $\therefore$ $\overline{CF} \cong \overline{FB}$ হইবে।

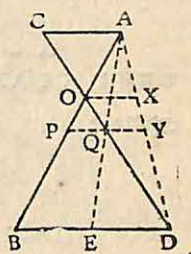
$\therefore$ F, $\overline{BC}$-বাহুর মধ্যবিন্দু হইবে।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, ত্রিভুজের কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল করিয়া কোন সরলরেখা টানিলে, উহা অপর বাহুর মধ্যবিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। $\therefore$ $\overline{DE} \| \overline{BC}$.

উদা. 4. $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ সরলরেখাদ্বয় O-বিন্দুতে পরস্পর এমনভাবে ছেদ করিয়াছে, যাহাতে $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ হইয়াছে। P ও Q যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু। দেখাও যে, $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$-র সমান্তরাল। [W. B. S. F. (Addl.) 1970]

দেওয়া আছে : $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর O-বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করিয়াছে, যাহাতে $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ হইয়াছে। $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু P ও $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু Q.

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$-র সমান্তরাল।

অঙ্কন : AD যোগ কর। O এবং Q বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে $\overleftrightarrow{CA}$-এর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরলরেখা টান। মনে কর, উহারা যথাক্রমে $\overline{AD}$-কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। AQ যোগ করিয়া $\overline{BD}$-র E-বিন্দুতে ছেদ করাও।

প্রমাণ : $\because$ $\overline{OX} \| \overline{CA}$ $\therefore$ $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{XA}}{\overline{XD}}$; আবার, $\because$ $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$,

$\therefore$ $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{XA}}{\overline{XD}}$; এক্ষণে, $\because$ ABD ত্রিভুজে $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{XA}}{\overline{XD}}$

$\therefore$ $\overline{OX} \| \overline{BD}$. $\therefore$ $\overline{AC} \| \overline{BD}$.

আবার, ΔDAC-তে $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু Q এবং $\overline{QY} \| \overline{AC}$ $\therefore$ Y, $\overline{DA}$-এর মধ্যবিন্দু হইবে (পূর্বোক্ত উদাহরণের প্রমাণ দেখ)।

$\because$ ΔAED-র $\overline{AD}$-র মধ্যবিন্দু Y এবং $\overline{QY} \| \overline{BD}$. ($\because$ $\overline{QY} \| \overline{AC}$ এবং $\overline{AC} \| \overline{BD}$)
$\therefore$ Q, $\overline{AE}$-র মধ্যবিন্দু হইবে। আবার, ΔABE-র $\overline{AE}$-র মধ্যবিন্দু Q এবং $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু P,

$\therefore$ $\overline{PQ} \| \overline{BE}$ $\quad$ $\therefore$ $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$-র সমান্তরাল।

*উদা. 5. ΔABC-র $\angle$A-র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AD}$, $\overline{BD}$-র D-বিন্দুতে মিলিত হইল। C-বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AD}$-র সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টান। মনে কর, উহা $\overrightarrow{BA}$-র সহিত E-বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

প্রমাণ কর যে, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

দেওয়া আছে: ΔABC-র $\angle$BAC-র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AD}$, $\overline{BC}$-র D-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

অঙ্কন: $\overrightarrow{CE} \| \overleftrightarrow{AD}$ টান। উহা $\overrightarrow{BA}$-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: $\because$ $\overline{AD} \| \overline{CE}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BE}$ উহাদের ভেদক,

$\therefore$ $\angle$CAD $\cong$ একান্তর $\angle$ACE এবং $\angle$BAD $\cong$ অনুরূপ $\angle$AEC.

$\because$ $\angle$BAD $\cong$ $\angle$CAD $\quad$ $\therefore$ $\angle$ACE = $\angle$AEC.

এক্ষণে, ΔACE-তে $\because$ $\angle$ACE $\cong$ $\angle$AEC $\quad$ $\therefore$ $\overline{AE} \cong \overline{AC}$.

আবার, $\because$ ΔBCE-তে, $\overline{AD} \| \overline{CE}$ $\therefore$ $\frac{\overline{BA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

$\because$ $\overline{AC} \cong \overline{AE}$ $\therefore$ $\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ অর্থাৎ, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

অনুশীলনী 9

1. প্রমাণ কর যে, তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোন দুইটি ভেদককে সমানুপাতে বিভক্ত করে। [C. U. 1939, 1940]

2. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. একই ভূমি $\overline{AB}$ এবং উহার বিপরীত দুই পার্শ্বে ABC ও ABD দুইটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজদ্বয়ের স্থূলকোণদ্বয় B-বিন্দুতে অবস্থিত। $\overline{AC}$-র উপর যে-কোন বিন্দু E-র মধ্য দিয়া $\overrightarrow{EF} \| \overline{CB}$ টানা হইয়াছে। F, $\overline{AB}$ উপর অবস্থিত। $\overrightarrow{FG} \| \overline{BD}$ হইলে এবং G, $\overline{AD}$-র উপরিস্থিত বিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে, $\overline{EG} \| \overline{CD}$.

4. $\triangle ABC$-র $\overline{BA}$-কে Y এবং $\overline{CA}$ কে X পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। যদি $\frac{\overline{AX}}{\overline{CX}}=\frac{\overline{AY}}{\overline{BY}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$.

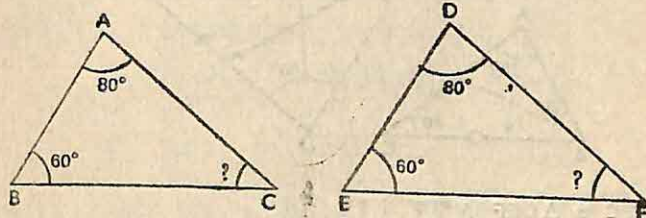
5. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা, উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল। [D. B. 1944]

6. $\triangle ABC$-র $\overline{BA}$-কে Y এবং $\overline{CA}$-কে X পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। যাদ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\overline{AX}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AY}}{\overline{AB}}$.

7. তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা কোন ভেদক হইতে সমান সমান অংশ ছিন্ন করিলে, উহারা অপর কোন ভেদক হইতেও সমান সমান অংশ ছিন্ন করিবে।

8. PQRS সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে O-বিন্দুতে ছেদ করিল। Q-বিন্দুর মধ্যদিয়া $\overleftrightarrow{PR}$-এর সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখা টানা হইল। আবার, P ও R বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{OQ}$-র সমান্তরাল করিয়া $\overrightarrow{PX}$ ও $\overrightarrow{RY}$ দুইটি সরলরেখা টানা হইল। যদি X ও Y, $\overleftrightarrow{AB}$-র উপরিস্থিত বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ} \parallel \overline{OY}$.

9. $\triangle ABC$-র $\overline{BC}$-র উপরিস্থিত D একটি বিন্দু। যদি $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{AD}$, $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক। [C. U. 1942]

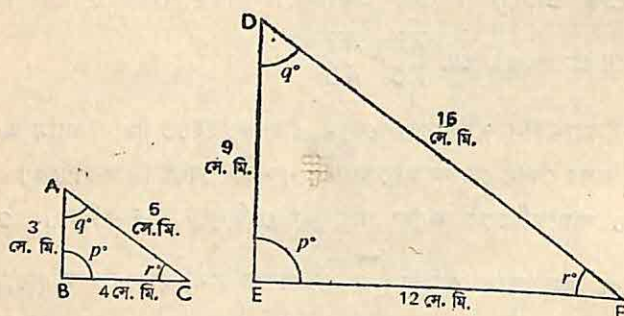
5.4. সদৃশকোণী ত্রিভুজ (Equiangular triangles) :

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর $\angle A \cong \angle D=80^\circ$; $\angle B \cong \angle E=60^\circ$.

$\therefore$ $\angle C$ এবং $\angle F$-এর প্রত্যেকের মান কত ?

$\angle C=180^\circ-(80^\circ+60^\circ)=40^\circ$, অনুরূপে $\angle F$-ও 40° হইবে।

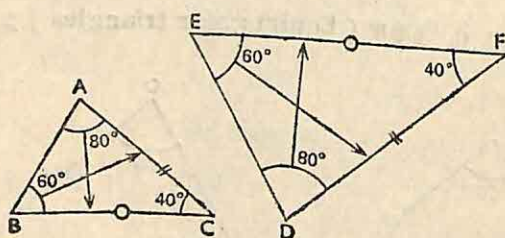
এইরূপ যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির তিন কোণ যথাক্রমে অপরটির তিন কোণের সমান হয়, তবে ঐ ত্রিভুজদ্বয়কে **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** বলে।

স্পষ্টতঃই, দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি কোণ যথাক্রমে অপরটির দুইটি কোণের সমান হইলেই, ত্রিভুজদ্বয়কে সদৃশকোণী বলিতে পারি।

5.5. সদৃশ ত্রিভুজ (Similar triangles) :

ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{DF}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. $\therefore$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

এইরূপ দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুযুগলের অনুপাতগুলি সমান হইলে, উহাদিগকে **সদৃশ ত্রিভুজ** বলে।

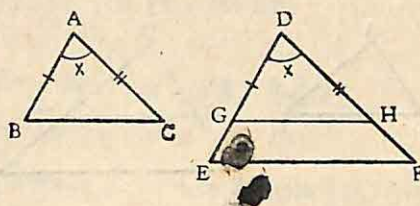
পরবর্তী পর্যায়ে, প্রমাণাদির সুবিধার জন্য নিম্নলিখিত চিত্র দুইটি বিশেষভাবে লক্ষ্য কর :

যদি $\triangle$ ABC ও $\triangle$ DEF সদৃশকোণী হয়, তবে

$$\frac{\overline{BC}(\triangle ABC\text{-র } 80^\circ\text{-কোণের বিপরীত বাহু})}{\overline{EF}(\triangle DEF\text{-এর } 80^\circ \text{ কোণের বিপরীত বাহু})}=\frac{\overline{AC}(60^\circ\text{-র বিপরীত})}{\overline{DF}(60^\circ\text{-র বিপরীত})}$$

$$=\frac{\overline{AB}(40^\circ\text{-র বিপরীত বাহু})}{\overline{DE}(40^\circ\text{-র বিপরীত বাহু})}$$

উপপাদ্য 40

যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয়, তবে উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

[If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional.]

দেওয়া আছে : $\angle ABC$ ও ΔDEF সদৃশকোণী অর্থাৎ, ইহাদের মধ্যে $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$.

প্রমাণ করিতে হইবে : $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

অঙ্কন : $\overline{AB}$-র সমান করিয়া DE হইতে DG, এবং $\overline{AC}$-র সমান করিয়া DF হইতে $\overline{DH}$ অংশ কাটিয়া লও। GH যোগ কর।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDGH ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\overline{AB} \cong \overline{DG}$, $\overline{AC} \cong \overline{DH}$ এবং অন্তর্ভূত $\angle A \cong$ অন্তর্ভূত $\angle D$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DGH$ ($\because$ বাহু, বাহু, অন্তর্ভূত কোণ সমান)

$\therefore$ $\angle B \cong \angle DGH$; কিন্তু, $\because$ $\angle B \cong \angle E$

$\therefore$ $\angle DGH \cong \angle E$;

$\therefore$ $\overline{GH} \| \overline{EF}$ ($\because$ অনুরূপ কোণদ্বয় সমান)

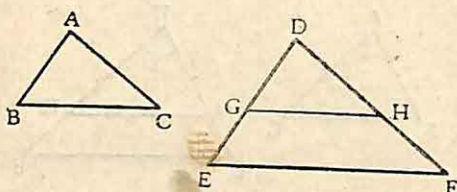
$\therefore$ $\frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DF}}$

আবার $\because$ $\overline{DG} \cong \overline{AB}$ এবং $\overline{DH} \cong \overline{AC}$ $\therefore$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

অনুরূপে, $\overline{BA}$ ও $\overline{BC}$-র সমান করিয়া যথাক্রমে ED ও EF হইতে কাটিয়া লইয়া দেখান যায় যে, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$; $\therefore$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

উপপাদ্য 41

যদি দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হইবে।

(If the corresponding sides of two triangles are proportional, the triangles are equiangular.)

দেওয়া আছে : ΔABC ও $\angle DEF$-এর $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

অঙ্কন : $\overline{DE}$ হইতে $\overline{AB}$-র সমান করিয়া $\overline{DG}$ অংশ এবং $\overline{DF}$ হইতে $\overline{AC}$-র সমান করিয়া $\overline{DH}$ অংশ কাটিয়া লও। GH যুক্ত কর।

প্রমাণ : $\because \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{DF}}$; $\therefore \overline{GH} \parallel \overline{EF}$;

এক্ষণে, $\because \overline{GH} \parallel \overline{EF}$ এবং $\overline{DE}$ উহাদের ভেদক, $\therefore \angle E \cong$ অনুরূপ $\angle DGH$; অনুরূপে, $\angle F \cong$ অনুরূপ $\angle DHG$; $\therefore \Delta DGH$ ও ΔDEF সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$ কিন্তু, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$

$\because \overline{DG} \cong \overline{AB} \therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

আবার $\because \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \therefore \overline{GH} \cong \overline{BC}$.

এক্ষণে, ΔABC ও ΔDGH-এর মধ্যে,

$\overline{DG} \cong \overline{AB}$, $\overline{DH} \cong \overline{AC}$ এবং $\overline{GH} \cong \overline{BC}$ $\therefore \Delta DGH \cong \Delta ABC$

$\therefore \angle DGH \cong \angle B$, $\angle DHG \cong \angle C$ এবং $\angle D \cong \angle A$.

$\therefore \Delta DGH$ ও ΔABC সদৃশকোণী;

$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔDEF-ও সদৃশকোণী হইবে।

উদাহরণ 1. PQRS একটি আয়তক্ষেত্র। $\overline{PS}$-এর উপর PAS একটি অর্ধবৃত্ত। $\overline{PR}$-এর সমান্তরাল করিয়া S-এর মধ্য দিয়া একটি সরলরেখা টানা হইল এবং উহা অর্ধবৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{PT}.\overline{PS}=\overline{RS}.\overline{ST}$.

দেওয়া আছে ঃ PQRS একটি আয়তক্ষেত্র। $\overline{PS}$-এর উপর PAS একটি অর্ধবৃত্ত। $ST \parallel PR$.

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\overline{PT}.\overline{PS}=\overline{RS}.\overline{ST}$.

অঙ্কন ঃ PT যোগ কর।

প্রমাণ ঃ $\because$ $\overline{ST} \parallel \overline{PR}$ এবং $\overline{PS}$ উহাদের ছেদক, $\therefore$ $\angle PST \cong$ একান্তর $\angle RPS$.

এবং $\angle PTS = 1$ সমকোণ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ],

আবার, $\angle RSP = 1$ সমকোণ [$\because$ PQRS আয়তক্ষেত্র]

এক্ষণে, ΔPTS ও ΔRSP এর মধ্যে,

$\angle PST \cong \angle RPS$, $\angle PTS \cong \angle RSP$;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। $\therefore$ $\dfrac{\overline{PT}}{\overline{RS}}=\dfrac{\overline{ST}}{\overline{PS}}$;

$\therefore$ $\overline{PT}.\overline{PS}=\overline{RS}.\overline{ST}$ [বজ্রগুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা]।

উদাহরণ 2. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের পরিসীমা দুইটি যে কোন দুই অনুরূপ বাহুর সমানুপাতী। (C. U. 1946)

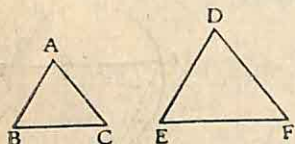
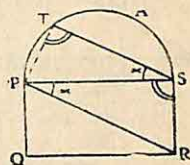
দেওয়া আছে ঃ ΔABC ও $\angle DEF$ সদৃশ।

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}}$.

প্রমাণ ঃ $\because$ $\angle ABC$ ও $\angle DEF$ সদৃশ, $\therefore$ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$;

অথবা, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}}$ (সংযোজন-প্রক্রিয়া দ্বারা)।

উদাহরণ 3. ABCD একটি সামান্তরিক। $\overline{CB}$-কে F পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। $\overline{DF}$, $\overline{AB}$-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{\overline{DA}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$ (C. U. 1938)

দেওয়া আছে : ABCD সামান্তরিকের $\overline{CB}$-কে F পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। $\overline{DF}$, $\overline{AB}$-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\frac{\overline{DA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$.

প্রমাণ : $\triangle AED$ ও $\triangle BEF$-এর মধ্যে,

$\angle AED \cong$ বিপ্রতীপ $\angle BEF$, $\angle EAD \cong$ একান্তর $\angle EBF$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{\overline{DA}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$, $\therefore \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}$. (একান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা)।

আবার, $\triangle FBE$ ও $\triangle FCD$-র মধ্যে,

$\angle FBE \cong$ অনুরূপ $\angle FCD$; $\angle F$ সাধারণ, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$ $\therefore \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$ (একান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা)।

$\therefore \frac{\overline{DA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}$,

উদাহরণ 4. যদি কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা, ঐ বৃত্তের মধ্যে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। [W.B.S.F. (Addl.) 1970, 1971]

দেওয়া আছে : $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ জ্যা দুইটি পরস্পরকে P-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{AP}.\overline{PB}=\overline{CP}.\overline{PD}$.

অঙ্কন : AC ও BD যোগ কর।

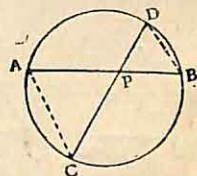
প্রমাণ : একই চাপ BC-র উপর অবস্থিত

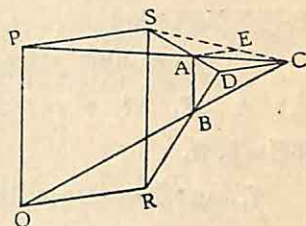
$\angle CAB \cong \angle BDC$, অর্থাৎ, $\angle CAP \cong \angle BDP$;

এক্ষণে, $\triangle APC$ ও $\triangle BPD$-র মধ্যে,

$\angle CAP \cong \angle BDP$, $\angle APC \cong$ বিপ্রতীপ $\angle BPD$;

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী $\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}$.

$\therefore \overline{AP}.\overline{PB}=\overline{CP}.\overline{PD}$

উদাহরণ 5. PQRS সামান্তরিকের বাহিরে $\overleftrightarrow{AB}$ এমন একটি সরলরেখা যাহা $\overline{PQ}$-র সমান্তরাল। $\overrightarrow{PA}$ ও $\overrightarrow{QB}$ পরস্পর C-বিন্দুতে এবং $\overrightarrow{SA}$ ও $\overrightarrow{RB}$ পরস্পর D-বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, $\overline{CD} \| \overline{PS}$.

দেওয়া আছে : PQRS সামান্তরিকের বাহিরে $\overleftrightarrow{AB}$ একটি সরলরেখা এবং ইহা $\overline{PQ}$-র সমান্তরাল। $\overrightarrow{PA}$ ও $\overrightarrow{QB}$ পরস্পর C-বিন্দুতে এবং $\overrightarrow{SA}$ এবং $\overrightarrow{RB}$ পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{CD} \| \overline{PS}$.

অঙ্কন : CS যোগ কর। $\overline{AE} \| \overline{DC}$ টান। AE, $\overline{SC}$-র E-বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\triangle CAB$ ও $\triangle CPQ$-র মধ্যে,

$\angle CAB \cong$ অনুরূপ $\angle CPQ$ এবং $\angle CBA \cong$ অনুরূপ $\angle CQP$

[$\because$ $\overline{AB} \| \overline{PQ}$, $\overline{CP}$ ও $\overline{CQ}$ ভেদক।]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী $\therefore$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$;

অনুরূপে, $\triangle DAB$ ও $\triangle DSR$ সদৃশকোণী $\therefore$ $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DS}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{SR}}$.

কিন্তু, $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{SR}}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DS}}$;

$\because$ $\triangle SDC$-র $\overline{DC}$-র সমান্তরাল $\overline{AE}$, $\therefore$ $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DS}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CS}}$

কিন্তু, $\because$ $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DS}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CS}}$;

এক্ষণে, $\triangle CPS$-এ $\because$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CS}}$, $\therefore$ $\overline{AE} \| \overline{PS}$ $\therefore$ $\overline{CD} \| \overline{PS}$.

অনুশীলনী 10

1. $\triangle ABC$-র $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q এবং R ; প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$ সদৃশ।

2. ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

3. ABCD ট্রাপিজিয়মের $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle OAD$ ও $\triangle OBC$ সদৃশ।

4. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ বৃত্তের বাহিরে P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\overline{PB} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PA}$. (C. U. 1948)

5. যদি বৃত্তের দুইটি জ্যা ঐ বৃত্তের বাহিরে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। [W. B. S. F. (Addl.) 1972]

6. PQRS একটি সামান্তরিক। X ও Y যথাক্রমে $\overline{PS}$ ও $\overline{QR}$-এর মধ্যবিন্দু। $\overline{XY}$ ও $\overline{QX}$, $\overline{PR}$-কে যথাক্রমে A ও B-বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{PR}$.

7. একটি সরলরেখার উপর A, B, C ও D পরপর চারিটি বিন্দু দেওয়া আছে। ঐ সরলরেখার উপর এমন একটি X বিন্দু নির্ণয় কর, যাহাতে $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{XC}}{\overline{XD}}$ হয়।

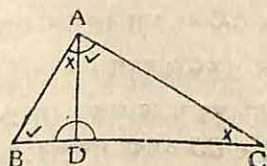
8. প্রমাণ কর যে, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধের অনুপাত উহাদের পরিসীমার অনুপাতের সমান।

9. $\overline{AB}$ উপর একটি অর্ধবৃত্ত টানা হইল। $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ জ্যা দুইটি ঐ অর্ধবৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পরকে P-বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AP} + \overline{BD}.\overline{BP}.$$ [C. U. 1937]

উপপাদ্য 42

সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের উভয় পার্শ্বস্থ ত্রিভুজদ্বয়, সমগ্র ত্রিভুজের সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ হইবে।

[If a perpendicular is drawn from the vertex of the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.]

দেওয়া আছে : সমকোণী $\triangle ABC$-র $\angle BAC$ সমকোণ। $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ △DBA ও △DAC-র প্রত্যেকে △ABC-র সহিত এবং △DBA ও △DAC পরস্পরের সহিত সদৃশ।

প্রমাণ ঃ △DBA ও △ABC-র মধ্যে,

∠ADB≅∠BAC (∵ প্রত্যেকে সমকোণ),

∠B উভয়ের মধ্যে সাধারণ, ∴ অবশিষ্ট ∠BAD≅অবশিষ্ট ∠ACB ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ∴ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

∴ △DBA ও △ABC সদৃশ।

আবার, △DAC এবং △ABC র মধ্যে,

∠ADC≅∠BAC (∵ প্রত্যেকে সমকোণ) ;

∠C উভয়ের মধ্যে সাধারণ।

∴ অবশিষ্ট ∠DAC≅অবশিষ্ট ∠ABC

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

∴ উহাদের বাহুগুলি সমানুপাতী।

∴ △DAC এবং △ABC সদৃশ।

এক্ষণে, △DBA এবং △DAC প্রত্যেকেই △ABC-র সহিত সদৃশ হওয়ায় উহারা পরস্পর সদৃশ।

∴ △DBA এবং △DAC পরস্পর সদৃশ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের উপর বর্গক্ষেত্র, অতিভুজের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

∵ △DBA ও △DAC সদৃশ (পূর্বোক্ত চিত্র দেখ)।

$\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \quad \therefore \overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{CD}$;

$\overline{AD}$-কে $\overline{BD}$ ও $\overline{CD}$-র **মধ্য সমানুপাতী** (mean proportional) বলে।

আবার, △ABD ও △ABC এই সদৃশ ত্রিভুজ দুইটি হইতে আমরা পাই ;

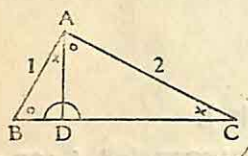
$(i)\quad \overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}.$

এবং △ACD ও △ABC এই সদৃশ ত্রিভুজ দুইটি হইতে,

$(ii)\quad \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{CD}.$

উদাহরণ 1. যদি কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু অপর বাহুর দ্বিগুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব অতিভুজকে 4 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। (W. B. S. F. Addl. 1969)

দেওয়া আছে : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\overline{AC}=2\overline{AB}$ এবং $\overline{AD}\perp\overline{BC}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{AD}$, $\overline{BC}$-কে 4 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔCAD সদৃশ।

$\because$ সমকৌণিক বিন্দু A হইতে অতিভুজ $\overline{BC}$-র উপর $\overline{AD}$ লম্ব

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \quad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{AD}} \qquad [\because \overline{AC}=2\overline{AB}]$$

$$\frac{1}{\overline{BD}}=\frac{2}{\overline{AD}} \qquad \therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{2}{1}$$

এক্ষণে, উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া, $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{4}{1}$

$$\therefore \frac{\overline{BD}.\overline{CD}}{\overline{BD}^2}=\frac{4}{1} \quad [\because \overline{AD}^2=\overline{BD}.\overline{CD}] \quad \therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{4}{1}$$

সুতরাং, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ কে 4 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

অনুশীলনী 11

1. PQRS একটি আয়তক্ষেত্র। $\overline{PS}$-এর উপরে PAS একটি অর্ধবৃত্ত। S-এর মধ্য দিয়া $\overline{PR}$-এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টানা হইল এবং উহা অর্ধবৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{PS}^2=\overline{ST}.\overline{PR}$.

2. ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার $\overline{AD}\perp\overline{BC}$. যদি $\frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। (C. U. 1948)

3. ΔABC-র $\angle ACB=1$ সমকোণ। যদি $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\overline{CD}^2=\overline{AD}.\overline{DB}$. [W. B. S. F. (Addl.) 1972]

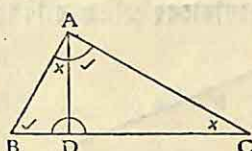
4. $\overline{BC}$ বৃত্তের ব্যাস। B-বিন্দুতে $\overline{BA}$ একটি স্পর্শক। $\overline{CA}$ বৃত্তটিকে D-বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DA}$-এর মধ্য-সমানুপাতী।

5. PQRS একটি চতুর্ভুজ। ইহার $\overline{PQ}\parallel\overline{RS}$. $\angle PQR\cong\angle RPS=1$ সমকোণ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\overline{PR}^2=\overline{PQ}.\overline{RS}$.

উপপাদ্য 43

(পীথাগোরাসের উপপাদ্য)

কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান।

(The area of the square on the hypotenuse of any right-angled triangle is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides.)

দেওয়া আছে : সমকোণী ΔABC-র $\angle BAC$ সমকোণ। $\overline{BC}$ অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

অঙ্কন : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ টান।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDBA-এর মধ্যে,

$\angle BAC \cong \angle ADB$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

$\angle B$ উভয়ের মধ্যে সাধারণ।

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ACD \cong$ অবশিষ্ট $\angle BAD$; $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$, $\therefore \overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}$ ... ... (1)

আবার, ΔABC ও ΔDAC-র মধ্যে,

$\angle BAC \cong \angle ADC$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ),

$\angle C$ উভয়ের মধ্যে সাধারণ,

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ABC \cong$ অবশিষ্ট $\angle CAD$; $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ $\therefore \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{DC}$ ... ... (2)

এক্ষণে, (1) ও (2) যোগ করিয়া, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{BD} + \overline{BC}.\overline{DC}$

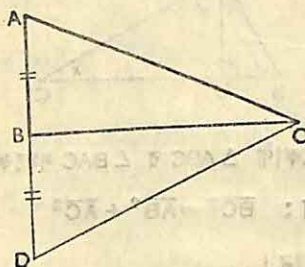
$= \overline{BC}.(\overline{BD} + \overline{DC}) = \overline{BC}.\overline{BC} = \overline{BC}^2$.

$\because \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

উপপাদ্য 44

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইলে, উক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তভু্ক্ত কোণটি সমকোণ হইবে।

(If a square described on one side of a triangle is equal to the sum of the squares described on the other two sides, then the angle contained by those two sides is a right angle.)

[পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞার বিপরীত]

দেওয়া আছে ঃ ΔABC র $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে ঃ $\angle ABC = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন ঃ BC-র B-বিন্দুতে একটি লম্ব টান। ঐ লম্ব হইতে $\overline{AB}$ র সর্বসম করিয়া BD কাটিয়া লও। C, D যুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ ΔABC-তে $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$ (দেওয়া আছে)

আবার, ΔDBC-র মধ্যে

$\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$ ($\because \overline{BD} \perp \overline{BC}$)

অর্থাৎ, $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2$ (অঙ্কনানুসারে $\because \overline{BD} \cong \overline{AB}$)

$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 \quad \therefore \overline{AC} \cong \overline{CD}$.

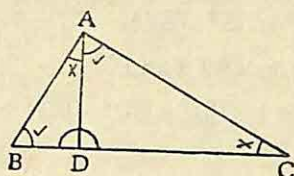
এক্ষণে, ΔABC ও ΔDBC-র মধ্যে

$\overline{AB} \cong \overline{BD}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ এবং $\overline{BC}$ উভয়ের মধ্যে সাধারণ।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC \quad \therefore \angle ABC \cong \angle DBC$.

কিন্তু যেহেতু $\angle DBC = 1$ সমকোণ

$\therefore \angle ABC$-ও 1 সমকোণ হইবে।

উপপাদ্য 44-এর বিকল্প প্রমাণ (বীজগণিত প্রয়োগে)

দেওয়া আছে : Δ ABC-র $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে : $\angle BAC = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ টান।

প্রমাণ : $\because$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ Δ ADB ও Δ ADC-র প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \cdots$(i) এবং $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \cdots (ii) \cdots$ (উপ. 43)

$\therefore$ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ [(i) ও (ii) যোগ করিয়া]

$\therefore$ $\overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ [$\because$ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$]

$\therefore$ $(\overline{BD} + \overline{CD})^2 = 2\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ [$\because$ $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$]

$\therefore$ $\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BD}.\overline{CD} = 2\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$

$\therefore$ $2\overline{BD}.\overline{CD} = 2\overline{AD}^2$.

$\therefore$ $\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{CD}$. $\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{AD}^2} = \dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া]

$\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{AD}^2} = \dfrac{\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2}{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$ [সংযোজন প্রক্রিয়া দ্বারা]

$= \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ $\therefore$ Δ ADB ও Δ ADC সদৃশকোণী [উপ. 41]

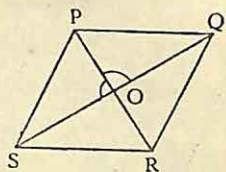
$\therefore$ $\angle ABD \cong \angle CAD$ এবং $\angle BAD \cong \angle ACD$;

$\therefore$ $\angle CAD + \angle BAD = \angle ABD + \angle ACD = \angle B + \angle C$;

অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle B + \angle C = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \times$ (দুই সমকোণ) $= 1$ সমকোণ।

উদা. 1. PQRS একটি রম্বস। প্রমাণ কর যে, $\overline{PR}^2 + \overline{QS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2$.

দেওয়া আছে : PQRS একটি রম্বস।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{PR}^2 + \overline{QS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2$.

প্রমাণ : $\because$ রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে,
$\therefore$ ΔPOS, ΔPOQ, ΔROQ, ΔROS-এর প্রত্যেকে এক একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore \quad \overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2, \quad \overline{QR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2,$

$\overline{RS}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2, \quad \overline{SP}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OP}^2;$

$\therefore \quad \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 + \overline{OS}^2 + \overline{OP}^2$ (যোগ করিয়া)

$\therefore \quad \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2 = 2\overline{OP}^2 + 2\overline{OQ}^2 + 2\overline{OR}^2 + 2\overline{OS}^2$

$= 2(\overline{OP}^2 + \overline{OR}^2) + 2(\overline{OQ}^2 + \overline{OS}^2)$

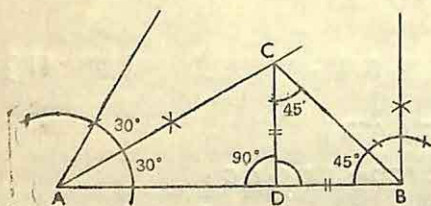
$= 2(2\overline{OP}^2) + 2(2\overline{OQ}^2)$

[$\because$ $\overline{OP} \cong \overline{OR}$ এবং $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$]

$= 4\overline{OP}^2 + 4\overline{OQ}^2$

$= (2\overline{OP})^2 + (2\overline{OQ})^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QS}^2$

$\therefore \quad \overline{PR}^2 + \overline{QS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2$.

***উদা. 2.** একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমনভাবে দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন, একটি অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।

দেওয়া আছে : $\overline{AB}$ একটি সরলরেখাংশ।

প্রমাণ করিতে হইবে : $\overline{AB}$ কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন একটি অংশের বর্গ অপর অংশের বর্গের তিনগুণ হয়।

অঙ্কন : A ও B-বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle BAC = 30^\circ$ ও $\angle ABC = 45^\circ$ করিয়া আঁক। মনে কর, $\overline{AC}$ ও $\overline{BC}$ পরস্পর C-বিন্দুতে মিলিত হইল। C-বিন্দুতে $\angle DBC$-র সমান করিয়া $\angle BCD$ আঁক। D, $\overline{AB}$-র উপরিস্থিত বিন্দু। এক্ষণে, D বিন্দুতেই $\overline{AB}$ এমন দুইটি অংশে বিভক্ত হইবে যে, একটি অংশের বর্গ, অপর অংশের বর্গের তিনগুণ হইবে।

প্রমাণ : ΔDBC-র $\because$ $\angle DCB \cong \angle DBC = 45^\circ$ $\therefore$ $\angle CDB = 90^\circ$

$\therefore$ $\angle CDA = 90^\circ$; $\therefore$ ΔCDB ও ΔCDA-এর প্রত্যেকে সমকোণী ত্রিভুজ।

এক্ষণে, $\because$ $\angle DCB \cong \angle DBC = 45^\circ$ $\therefore$ $\overline{DC} \cong \overline{DB}$.

আবার, $\because$ CDA সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle CAD = 30^\circ$ $\therefore$ $\angle ACD = 60^\circ$

$\therefore$ $\overline{AC} = 2\overline{DC}$;

এক্ষণে, CDA সমকোণী ত্রিভুজে, $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$

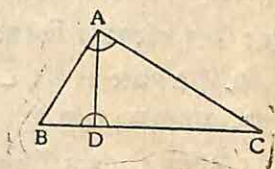
$\therefore$ $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2$

$= (2\overline{DC})^2 - \overline{DC}^2 = 3\overline{DC}^2 = 3\overline{DB}^2$ [$\because$ $\overline{DC} \cong \overline{DB}$]

অতএব, D বিন্দুতে $\overline{AB}$ এমনভাবে দুইটি অংশে বিভক্ত হইয়াছে যে, একটি অংশের বর্গ, অপর অংশের বর্গের তিনগুণ হইয়াছে।

উদা. 4. ΔABC-র $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. $\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{CD}$ হইলে দেখাও যে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। (W. B. S. F. 1956)

দেওয়া আছে : ΔABC-র A বিন্দু হইতে $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ এবং $\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{CD}$.

প্রমাণ করিতে হইবে : ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ : $\overline{BC}^2 = (\overline{BD} + \overline{CD})^2$ ($\because$ $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$)

$= \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BD}.\overline{CD}$

$= \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{AD}^2$ ($\because$ $\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{CD}$)

$= \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$

$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ ($\because$ $\angle ADB$ ও $\angle ADC$-র প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ $\angle BAC = 1$ সমকোণ। অতএব, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 11

1. ABCD একটি রম্বস। প্রমাণ কর যে, $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{AB}^2$.

2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের শীর্ষবিন্দু দুইটি হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির চারিগুণ, উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণের সমান হইবে। (W. B. S. F. 1969)

3. $\triangle$ABC-র মধ্যস্থিত O যে-কোন একটি বিন্দু। O বিন্দু হইতে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, $\overline{AR}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{BR}^2$. (W. B. S. F. 1970)

4. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমনভাবে দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন, একটি অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়। (C. U. 1946, W. B. S. F. 1957)

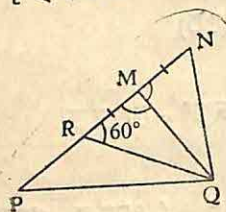
5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমনভাবে দুই অংশে বিভক্ত কর, যাহাতে অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

6. $\triangle$ABC র $\angle$ACB স্থূলকোণ। $\overline{BC}$-র বর্ধিতাংশের উপর $\overline{AD}$ লম্ব টান। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC}.\overline{CD}$.

7. $\triangle$ABC-র ACB সূক্ষ্মকোণ। $\overline{BC}$-র উপর $\overline{AD}$ লম্ব টান। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}.\overline{CD}$.

8. কোন সমবাহু ত্রিভুজের যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করিয়া দেখাও যে, ঐ লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ, যে কোন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। (C. U. 1933)

9. $\triangle$PQR-এর শীর্ষ $\angle$R-এর বহিঃকোণ $60°$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ}^2 - \overline{QR}^2 = \overline{RP}(\overline{RP} + \overline{QR})$. (W. B. C. S. 1964)

[**ইঙ্গিত**ঃ মনে কর, $\triangle$PQR-এর শীর্ষ $\angle$R-এর বহিঃকোণ $= 60°$. $\overline{PR}$-কে বর্ধিত করিয়া Q হইতে বর্ধিতাংশের উপর লম্ব টান। মনে কর, উহা বর্ধিতাংশের উপর M বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। $\overline{RM}$-কে পুনরায় বর্ধিত কর এবং $\overline{RM}$-এর সমান করিয়া $\overline{MN}$ কাটিয়া লও। $\overline{QN}$ যোগ কর।

প্রমাণঃ এক্ষণে, $\triangle$QMR ও $\triangle$QMN-কে সর্বসম দেখাইয়া প্রমাণ কর যে, $\triangle$QRN একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore$ $\overline{QR} \cong \overline{RN} \cong \overline{NQ}$. $\therefore$ $\overline{QR} = 2\overline{RM}$.

আবার, PMQ সমকোণী ত্রিভুজে, $\overline{PQ}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2$

এবং RMQ সমকোণী ত্রিভুজে, $\overline{QR}^2 = \overline{RM}^2 + \overline{MQ}^2$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \overline{PQ}^2 - \overline{QR}^2 &= \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2 - (\overline{RM}^2 + \overline{MQ}^2) \\ &= \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2 - \overline{RM}^2 - \overline{MQ}^2 \\ &= \overline{MP}^2 - \overline{RM}^2 = (\overline{MP} + \overline{RM})(\overline{MP} - \overline{RM}) \\ &= \overline{PR}(\overline{PR} + \overline{RM} + \overline{RM}) = \overline{PR}(\overline{PR} + \overline{RM} + \overline{MN}). \\ &= \overline{PR}(\overline{PR} + \overline{RN}) = \overline{PR}(\overline{PR} + \overline{QR}).\ ]\end{aligned}$$

10. ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত $5 : 12 : 13$ হইলে, দেখাও যে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

11. দেখাও যে, ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 9 সে. মি., 12 সে. মি. ও 15 সে. মি. হইলে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

12. দেখাও যে, ত্রিভুজের বাহুত্রয় $2n+1$, $2n^2+2n+1$ এবং $2n(n+1)$ হইলে, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ। (B. C. S. 1936)

13. ΔABC-র a, b, c বাহুগুলি দেওয়া আছে। যদি $2s = a+b+c =$ ত্রিভুজের পরিসীমা হয়, তবে দেখাও যে, $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

14. $\sqrt{3}$ সে. মি. ও $\sqrt{5}$ সে. মি. দুইটি সরলরেখা আঁকিয়া দেখাও।

(পীথাগোরাস প্রয়োগে)

ষষ্ঠ অধ্যায়

ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য

সংজ্ঞা :

6.1. পরিবৃত্ত, পরিকেন্দ্র, পরিব্যাসার্ধ :

কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটির মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (circumscribed circle or the circle about a triangle) বলে।

ঐ পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (circum-radius) বলে।

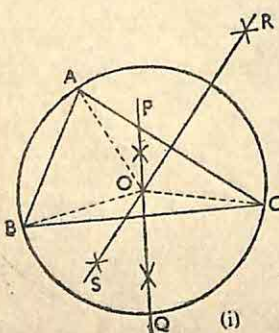
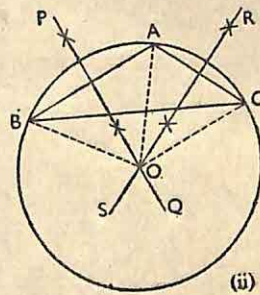
6.2. অন্তর্বৃত্ত, অন্তঃকেন্দ্র, অন্তর্ব্যাসার্ধ :

যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরে থাকিয়া উহার প্রত্যেক বাহুকে স্পর্শ করিয়া যায়, ঐ বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed circle or the circle in a triangle) বলে।

ঐ অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (in-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (in-radius) বলে।

সম্পাদ্য 20

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To draw a circle about a triangle.)

চিত্র (i) চিত্র (ii)

দেওয়া আছে : ABC একটি ত্রিভুজ।

অঙ্কন করিতে হইবে : A, B এবং C-র মধ্য দিয়া যায়, এরূপ একটি ত্রিভুজ।

অঙ্কন : $\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}$- লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক [চিত্র (i)] যথাক্রমে $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{RS}$ অঙ্কন কর। মনে কর, উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এক্ষণে, O-ই উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ হইবে। O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলেই উহা A, B এবং C-র মধ্য দিয়া যাইবে। অর্থাৎ ঐ বৃত্তটিই হইবে ΔABC-র পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : $\because$ O বিন্দু $\overline{BC}$-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

$\therefore$ $\overline{OB} \cong \overline{OC}$;

আবার, $\because$ O বিন্দু $\overline{AC}$-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

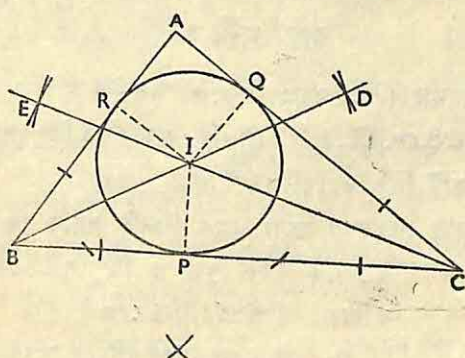
$\therefore$ $\overline{OC} \cong \overline{OA}$; $\therefore$ $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$;

$\therefore$ O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলেই উহা A, B এবং C-র মধ্য দিয়া যাইবে। অর্থাৎ, অঙ্কিত বৃত্তটিই ΔABC-র পরিবৃত্ত হইবে।

[**লক্ষ্য কর :** যেহেতু, কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু অতএব, উহাদের সম্পাত-বিন্দুই ঐ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইবে।]

সম্পাদ্য 21

কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To draw a circle in a triangle.)

দেওয়া আছে : ABC একটি ত্রিভুজ।

অঙ্কন করিতে হইবে : ΔABC-র মধ্যে এমন একটি বৃত্ত, যাহা $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$-এর প্রত্যেককে স্পর্শ করিয়া যাইবে।

অঙ্কন : ∠B এবং ∠C-র সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে $\overrightarrow{BD}$ এবং $\overrightarrow{CE}$ অঙ্কন কর। মনে কর, উহারা পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। I হইতে $\overline{BC}$-র উপর $\overline{IP}$ লম্ব টান।

এক্ষণে, I-ই হইবে উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং $\overline{IP}$ হইবে ব্যাসার্ধ। I হইতে $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-র উপর যথাক্রমে $\overline{IQ}$ এবং $\overline{IR}$ লম্ব অঙ্কন কর।

প্রমাণ : ∵ $\overrightarrow{BD}$, ∠B-র সমদ্বিখণ্ডক,

∴ $\overline{BD}$-র উপর যে কোন বিন্দু $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ হইতে সমদূরবর্তী।

∴ $\overline{IR} \cong \overline{IP}$;

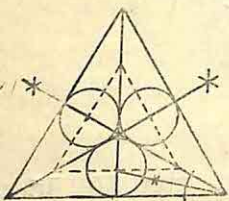
অনুরূপে, ∵ I বিন্দু ∠C-র সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{CE}$-র উপর অবস্থিত,

∴ $\overline{IP} \cong \overline{IQ}$, ∴ $\overline{IP} \cong \overline{IQ} \cong \overline{IR}$;

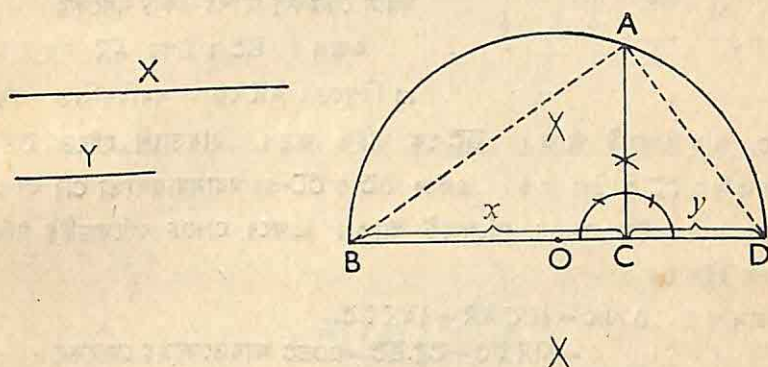
∴ I-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{IP}$ ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে উহা $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-কে যথাক্রমে P, Q এবং R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া যাইবে এবং Δ ABC-র ভিতরেও অবস্থান করিবে। ∴ অঙ্কিত বৃত্তটিই হইবে Δ ABC র অন্তর্বৃত্ত।

[**লক্ষ্য কর :** যেহেতু কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু, অতএব, উহাদের সম্পাত-বিন্দুই ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হইবে।]

অনুশীলনী 12

1. 5·2 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁক।
2. 6 সে. মি., 4·8 সে. মি. ও 3·7 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক।
3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক।
4. * একটি সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যে এমন তিনটি সমান বৃত্ত আঁক, যাহাদের প্রত্যেকে দুইটি বৃত্ত ও ত্রিভুজের একটি বাহুকে স্পর্শ করিবে। [পার্শ্বের চিত্র দেখ]
5. কোন ত্রিভুজের বাহিরে অথচ উহার বাহুগুলির উপর তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হইল। অঙ্কন ও প্রমাণসহযোগে দেখাও যে, ঐ ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তসমূহ একই বিন্দু দিয়া যাইবে। (C. U. 192

সম্পাদ্য 22

দুইটি প্রদত্ত সরলরেখার মধ্যসমানুপাতী অঙ্কিত করিতে হইবে।

(To draw mean proportional to two given straight lines.)

দেওয়া আছে : X, Y দুইটি সরলরেখা।

অঙ্কন করিতে হইবে : X ও Y-এর মধ্যসমানুপাতী।

অঙ্কন : X-এর সমান করিয়া $\overline{BC}$ একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর। আবার $\overline{BC}$-কে বর্ধিত করিয়া Y-এর সমান করিয়া $\overline{CD}$ টান। $\overline{DB}$-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া $\overline{OB}$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। C-বিন্দুতে $\overline{BD}$-র উপর একটি লম্ব টান। মনে কর, ঐ লম্বটি $\overrightarrow{CA}$ এবং উহা অর্ধবৃত্তটিকে A-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এক্ষণে, $\overline{AC}$-ই $\overline{BC}$ এবং $\overline{CD}$-র অর্থাৎ, X এবং Y-এর মধ্য সমানুপাতী হইল।

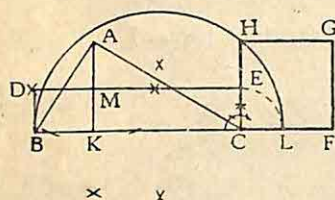
AB এবং AD যোগ কর।

প্রমাণ : $\angle BAD = 1$ সমকোণ (∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

∴ $\triangle ABD$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ∵ $\overline{AC}$, অতিভুজ $\overline{BD}$-র উপর লম্ব,

∴ $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ।

∴ $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} =$; অর্থাৎ $\frac{X}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{Y}$; ∴ $\overline{AC}$, X ও Y-এর মধ্য সমানুপাতী।

উদাহরণ : এমন একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর, যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

দেওয়া আছে : ABC একটি ত্রিভুজ।

অঙ্কন করিতে হইবে : Δ ABC-র সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র।

অঙ্কন : $\overline{BC}$-র উপর $\overline{AK}$ লম্ব টান। M-বিন্দুতে $\overline{AK}$-কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। BDEC আয়তক্ষেত্রটি আঁক। $\overline{BC}$-কে বর্ধিত কর। বর্ধিতাংশ হইতে $\overline{CE}$-র সমান করিয়া $\overline{CL}$ কাটিয়া লও। এক্ষণে $\overline{BC}$ ও $\overline{CL}$-এর মধ্যসমানুপাতী $\overline{CH}$ আঁক। $\overline{CH}$-কে বাহু লইয়া CHGF বর্গক্ষেত্রটি আঁক। এক্ষণে CHGF বর্গক্ষেত্রটিই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ : $\Delta ABC = \frac{1}{2}\overline{BC}.\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AK}.\overline{BC}.$

$= \overline{MK}.\overline{BC} = \overline{CE}.\overline{BC} =$ BDEC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$\because \overline{CE} \cong \overline{CL}$ $\therefore$ $\overline{CL}.\overline{BC} =$ BDEC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার, $\because$ $\overline{CH}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CL}$-এর মধ্য সমানুপাতী।

$\therefore \overline{CH}^2 = \overline{BC}.\overline{CL}.$

অতএব, CHGF বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ABC-র ক্ষেত্রফল।

অনুশীলনী 13

1. 8 সে. মি. ও 2 সে. মি. সরলরেখা দুইটির মধ্য সমানুপাতী অঙ্কন কর।
2. 6·4 সে. মি. ও 1·6 সে. মি. সরলরেখা দুইটির মধ্য সমানুপাতী অঙ্কন কর।
3. একটি আয়তক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র আঁক।
4. এমন একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর, যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক হইবে।

[**ইঙ্গিত :** প্রথমে বর্গক্ষেত্রের যে-কোন একটি কর্ণ যোগ করিয়া দুইটি ত্রিভুজে পরিণত কর। ঐ ত্রিভুজদ্বয়ের এক একটির ক্ষেত্রফল হইবে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। এক্ষণে, ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আঁক]।

5. একটি বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক।
6. জ্যামিতিক পদ্ধতি দ্বারা $\sqrt{5}$-এর মান বাহির কর।

পরিমিতি

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ
2. বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (এক বাহু)^2.
3. আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)।
4. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4 × (এক বাহু)।
5. চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × উচ্চতা × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)।
6. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা

   অথবা, $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ যখন

   Δ-এর পরিসীমা $= a+b+c=2s$.

7. সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ × (এক বাহু)।
8. সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ × (এক বাহু)^2।
9. (সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ)^2 = (এক বাহু)^2 + (অপর বাহু)^2।
10. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ

    = (অতিভুজ ভিন্ন এক বাহু) × $\sqrt{2}$.

11. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি = লম্ব $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ × (অতিভুজ)
12. বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$
13. বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$. (r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।
14. বৃত্তের চাপ $= \frac{x}{360}$ × পরিধি (x° = চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ)।
15. বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{x}{360}$ × বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ × চাপ × r.
16. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ × একটি কর্ণ × অফ্‌সেট্‌দ্বয়ের যোগফল।
17. বহুভুজের ক্ষেত্রফল = যে-কোন কৌণিক বিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণসমূহ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি।

18. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহু দুইটির সমষ্টি $\times$ উচ্চতা।

19 রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণ দুইটির গুণফল।

20. বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times ($ কর্ণ $)^2$।

বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। উহার মেঝে পাথর দ্বারা আবৃত করিতে প্রতি বর্গমিটারে 15 টাকা হিসাবে মোট 367·50 টাকা ও চারি দেওয়াল রং করিতে প্রতি বর্গমিটারে 1·50 টাকা হিসাবে মোট 126 টাকা ব্যয় হইল। ঐ ঘরের উচ্চতা কত? [W. B. C. S. 1967]

মেঝের ক্ষেত্রফল $= \frac{367 \cdot 50}{15}$ বর্গমি. $= \frac{36750}{1500}$ বর্গমি. $= \frac{49}{2}$ বর্গমি.।

$\because$ দৈর্ঘ্য $= 2 \times$ প্রস্থ $\quad \therefore$ $(2 \times$ প্রস্থ$) \times ($প্রস্থ$) = \frac{49}{2}$

$\therefore$ (প্রস্থ)$^2 = \frac{49}{2} \times \frac{1}{2}$ $\quad \therefore$ প্রস্থ $= \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ মি.

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= \frac{7}{2} \times 2$ মি. $= 7$ মি.

আবার, চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $= \frac{126}{1 \cdot 50}$ বর্গমি. $= \frac{12600}{150}$ বর্গমি.

$= 84$ বর্গমি.।

$\because$ চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ উচ্চতা $\times$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

$\therefore$ $2 \times$ উচ্চতা $\times (7 + \frac{7}{2}) = 84$

$\therefore$ ঐ ঘরের উচ্চতা $= 4$ মিটার।

উদা. 2. একটি তৃণাচ্ছাদিত বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির বাহিরের ও ভিতরের পরিধি যথাক্রমে $1885\frac{5}{7}$ ফুট ও $1697\frac{1}{7}$ ফুট হইলে, উহা চওড়ায় কত হইবে?

মনে কর, $r_1 =$ বৃত্তাকার পথের বাহিরের ব্যাসার্ধ

$r_2 =$ " " ভিতরের "

$\therefore$ রাস্তাটি $(r_1 - r_2)$ চওড়া হইবে।

এক্ষণে, বৃত্তাকার ক্ষেত্র সমেত রাস্তাটির পরিধি, $2\pi r_1 = 1885\frac{5}{7}$

কেবল বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির পরিধি, $2\pi r_2 = 1697\frac{1}{7}$

$\therefore$ $2\pi r_1 - 2\pi r_2 = 1885\frac{5}{7} - 1697\frac{1}{7}$

অথবা, $2\pi(r_1 - r_2) = 188\frac{4}{7}$ $\therefore$ $r_1 - r_2 = \frac{1320}{7} \times \frac{1}{2\pi}$

$= \frac{1320}{7} \times \frac{7}{2 \times 22} = 30$ $\therefore$ রাস্তাটি 30 ফুট চওড়া।

[π-এর অর্থ : পরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণিত হইয়াছে যে, কোন বৃত্তের পরিধি ও ঐ বৃত্তের ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক সংখ্যা। এই ধ্রুবকটিকে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা সূচিত করা হয়। π-এর আসন্ন মান নির্ধারণের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার আসন্ন মান 3·14159. সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত 3·1415926. ইহা একটি অমেয় রাশি। ইহাকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না। সাধারণতঃ ভগ্নাংশে ইহার স্থূল মান $\frac{22}{7}$ ধরা হয়। $\frac{355}{113}$ ইহার আরও শুদ্ধতর মান।]

উদা. 3. একটি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি ষ্টীলের পাতের ক্ষেত্রফল $25\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.। উহা হইতে যত বড় বৃত্তাকার চাক্‌তি কাটিয়া লওয়া যায়, তাহার ক্ষেত্রফল কত?

জ্যামিতি হইতে পাই, লম্ব $\overline{OD} \cong$ লম্ব $\overline{OE} \cong$ লম্ব $\overline{OF}$ $= r$ (ধর)। O এখানে ভরকেন্দ্র।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{3} \times$ সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা।

এক্ষণে, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=$ (বাহু)$^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

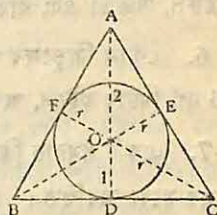
$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, (বাহু)$^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$\therefore$ বাহু $= 10$ সে. মি.

$\therefore$ উচ্চতা ($\overline{AD}$) $= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ সে. মি

($\because$ সমবাহু Δ-এর উচ্চতা $=$ বাহু $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$)

$\therefore$ চাক্‌তিটির ব্যাসার্ধ (r) $= \frac{1}{3} \times 5\sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ সে. মি.

$\therefore$ বৃত্তাকার চাকতিটির ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = 26{\cdot}19$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)।

অনুশীলনী 1

1. একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি আয়তক্ষেত্র উভয়েরই পরিসীমা 80 সে. মি.। যদি উহাদের ক্ষেত্রফলের পার্থক্য 100 বর্গ সে. মি. হয়, তবে উহাদের বাহুগুলির মাপ কত?

2. 200 গজ দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের চারিদিক ঘিরিয়া 20 ফুট প্রস্থ বিশিষ্ট একটি রাস্তা আছে। ঐ রাস্তায় প্রতি বর্গ ফুটে 2·50 টাকা হিসাবে মাদুর বিছাইতে মোট কত খরচ পড়িবে ?

3. একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 421875 বর্গফুট হইলে, প্রতি ফুটে 1·25 টাকা হিসাবে বেড়া দিতে মোট কত খরচ পড়িবে ?

4. আয়তাকার কোন জমির ক্ষেত্রফল 3872 বর্গ গজ ও ইহার দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। ঐ জমিটি তার-জালি দ্বারা বেড়া দেওয়া আছে। ঐ তার-জালি খুলিয়া লইয়া উহা দ্বারা আর একটি বৃত্তাকার জমি ঘিরিয়া দেওয়া হইল। নূতন জমিটির ক্ষেত্রফল কত হইল ? [W. B. C. S. 1964]

5. কোন রম্বসের কর্ণ দুইটি যথাক্রমে 60 মিটার ও 45 মিটার। উহার ক্ষেত্রফল, উচ্চতা এবং বাহুর দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

6. কোন ত্রিভুজের পরিসীমা 54 মিটার। একটি বাহু 21 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 126 বর্গ মিটার হইলে, অপর বাহু দুইটি কত হইবে ?

7. একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত। যদি ঐ ত্রিভুজের পরিসীমা ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে হাঁটিয়া 15 মিনিটে অতিক্রম করা যায়, তবে ঐ একই হারে হাঁটিয়া আয়তক্ষেত্রের একটি কর্ণ অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে ?

8. একটি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি স্টীলের পাতের ক্ষেত্রফল $1225\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.। উহা হইতে যত বড় বৃত্তাকার চাকতি কাটিয়া লওয়া যাইতে পারে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

9. একটি আয়তক্ষেত্রের বাহিরে এবং উহার বাহুগুলির উপর চারিটি অর্ধবৃত্ত আঁকা আছে। যদি অর্ধবৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের অনুপাত 3 : 5 হয় এবং অন্তর 6 ফুট হয়, তবে ঐ অর্ধবৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল কত ?

10. কোন বৃত্তের ব্যাস 30 সে. মি. হইলে, কত দৈর্ঘ্যের একটি বর্গক্ষেত্র ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যাইতে পারে ?

11. একটি ছোট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাস 200 সে.মি.। ইহার পরিসীমার বাহিরে 260 সে.মি. চওড়া একটি কংক্রীটের রাস্তা বাঁধাইতে মোট 1840 টাকা খরচ

পড়ে। যদি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরে রাস্তা না করিয়া ভিতরের দিকে করা হইত, তবে $98\frac{6}{13}$ টাকা খরচ পড়িত। ভিতরের রাস্তাটি চওড়ায় কত ?

12. একটি বৃত্তের ব্যাস d এবং ACB এমন যে-কোন একটি চাপ, যেন চাপ AC = চাপ BC ; প্রমাণ কর যে, $d=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$ যখন জ্যা $\overline{AB}=2a$ এবং জ্যা $\overline{AC}=b$.

***13.** 9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য ও 8 ইঞ্চি প্রস্থযুক্ত একটি আয়তাকার ধাতব পাতে 6টি সমান বৃত্তাকার গর্ত করা হইল এবং ইহার ফলে পাতের নূতন ও পুরাতন ওজনের অনুপাত যথাক্রমে 19 : 20 হইল। তৎপর গর্তগুলিকে এমনভাবে বর্ধিত করা হইল, যাহাতে উহাদের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধ 50% বাড়িয়া গেল। এক্ষণে, পাতের চূড়ান্ত ও প্রাথমিক ওজনের অনুপাত কত হইল ? (ধাতব পাতের ঘনত্ব = d ধর)

14. কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুত্রয়ের উপর লম্ব-দূরত্ব যথাক্রমে 6 মি., 8 মি., 10 মি. হইলে, ঐ ত্রিভুজের উচ্চতা কত ?

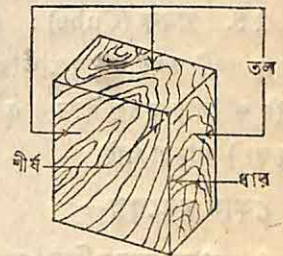
2. সমকোণী চৌপল

2.1. এই পর্যন্ত পরিমিতিতে তোমরা কেবল রেখার দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিবার বিভিন্ন সূত্র শিখিয়াছ। এই অধ্যায়ে ঐগুলি ছাড়াও **ঘনবস্তু** কি, বিভিন্ন ঘনবস্তুর **পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** (surface area) এবং উহাদের **ঘনফল** (volume) কি প্রকার সূত্রদ্বারা নির্ণয় করিতে হয়, তাহা বিশেষভাবে শিখিবে।

2.2. ঘনবস্তু (Solid) **:** এক কিংবা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ বস্তুকে (যাহা খানিকটা স্থান অধিকার করিয়া অবস্থান করে) **ঘনবস্তু** বলে। ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে।

2.3. বহুতলক (Polyhedron) **:** ইহা এমন একটি ঘনবস্তু, যাহা কতকগুলি সমতল দ্বারা সীমাবদ্ধ।

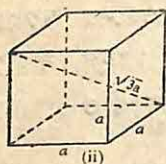
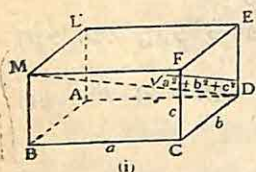
কোন বহুতলকের সন্নিহিত সমতলগুলি যে সাধারণ (common) রেখাগুলি দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, ঐ রেখাগুলিকে **ধার** (edge) বলে।

যে বিন্দুতে ধারগুলি মিলিত হয়, ঐ বিন্দুকে ঘনবস্তুটির **শীর্ষ** (vertex) বলে।

ঘনবস্তু

2.4. সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped): ইহা এমন এক প্রকার ঘনবস্তু, যাহা তিন জোড়া আয়তাকার সমতল দ্বারা সীমাবদ্ধ এবং ঐ তলগুলির বিপরীত তলগুলি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সমকোণী চৌপলের চারিটি কর্ণ (diagonal) ও বারটি ধার (edge) আছে।

চিত্রে, $\overline{MD}$ একটি কর্ণ। $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{CF}$ প্রভৃতি এক একটি ধার।

এক্ষণে, যদি a একক, b একক, c একক যথাক্রমে কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ধরা হয় তবে,

কোন সমকোণী চৌপলের—

1. **খাড়া পৃষ্ঠগুলির ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা**
$= (2a+2b) \times c$ বর্গ একক
$= \mathbf{2(ac+bc)}$ বর্গ একক।

2. **সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = খাড়া পৃষ্ঠগুলির ক্ষেত্রফল + অবশিষ্ট সমান পৃষ্ঠদ্বয়ের ক্ষেত্রফল**
$= 2(ac+bc)$ বর্গ একক $+ 2 \times ab$ বর্গ একক
$= \mathbf{2(ab+bc+ca)}$ বর্গ একক।

3. **ঘনফল** = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা
$= (a \times b) \times c$ ঘন একক $= \mathbf{abc}$ ঘন একক।

4. **যে কোন কর্ণের দৈর্ঘ্য** $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক।

2.5. ঘনক (Cube): ইহা এমন এক প্রকার সমকোণী চৌপল [চিত্র (ii)] যাহার ছয়টি তলই বর্গক্ষেত্রাকার। অতএব, সমকোণী চৌপলের পৃষ্ঠফল বা ঘনফল নির্ণয় করিবার সূত্রগুলিতে, $a=b=c$ ধরিয়া ($\because$ ঘনকের ক্ষেত্রে, দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা) আমরা পাই,

কোন ঘনকের—

1. **খাড়া তলগুলির ক্ষেত্রফল** = 4 (এক বাহু)$^2 = 4a^2$ বর্গ একক।
2. **সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** = 6 (এক বাহু)$^2 = 6a^2$ বর্গ একক।

3. **ঘনফল** = (এক বাহু)^3 = a^3 ঘন একক।

4. যে কোন কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3} \times$ (**এক বাহু**)
$= \sqrt{3}a$ একক।

ঘনফল নির্ণয় কার্যে নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি মনে রাখিবে :

10^3 অথবা 1000 ঘন সেন্টিমিটার = 1 ঘন ডেসিমিটার।
10^3 অথবা 1000 ঘন ডেসিমিটার = 1 ঘন মিটার।
10^3 অথবা 1000 ঘন মিটার = 1 ঘন ডেকামিটার......ইত্যাদি।

12^3 অথবা 1728 ঘন ইঞ্চি = 1 ঘন ফুট।
3^3 অথবা 27 ঘন ফুট = 1 ঘন গজ।

উদা. 1. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 20 সে.মি., 15 সে.মি. ও 12 সে.মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

এখানে দৈর্ঘ্য $a = 20$ সে.মি. ; প্রস্থ $b = 15$ সে.মি. ; উচ্চতা $= c = 12$ সে. মি.

মনে কর, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = T এবং ঘনফল = V

$\therefore$ $T = 2(ab + bc + ca)$
$= 2(20 \times 15 + 15 \times 12 + 12 \times 20)$ বর্গ সে.মি.
$= 1440$ বর্গ সে.মি.

এবং $V = abc$
$= 20 \times 15 \times 12 = 3600$ ঘন সে.মি.

$\therefore$ সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = 1440 বর্গ সে.মি. এবং ঘনফল = 3600 ঘন সে.মি.।

উদা. 2. 8″ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি স্টীলের ঘনক হইতে 10″ চওড়া ও $\frac{1}{8}$″ পুরু 16 খানি স্টীলের পাত তৈয়ারী করা হইল। ঐ স্টীলের পাতগুলির প্রত্যেকখানির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে কর, স্টীলের পাতের প্রত্যেকখানির দৈর্ঘ্য = a ইঞ্চি

$\therefore$ " " " ঘনফল $= a \times 10 \times \frac{1}{8}$ ঘন ইঞ্চি

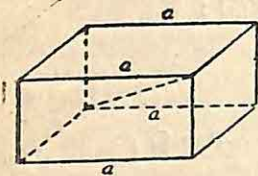
স্টীলের ঘনকের ঘনফল = 8^3 ঘন ইঞ্চি

$\therefore$ সর্তানুসারে, $a \times 10 \times \frac{1}{8} \times 16 = 8^3$

$$\therefore \quad a = \frac{8^3 \times 8}{10 \times 16} = 25{\cdot}6$$

$\therefore$ প্রত্যেকখানির দৈর্ঘ্য = 25·6 ইঞ্চি।

উদা. 3. কোন সমকোণী চৌপলের কর্ণ 10 সে.মি. এবং ধারগুলির সমষ্টি 80 সে.মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত? [C. U.]

মনে কর, দৈর্ঘ্য $= a$ সে.মি. ; প্রস্থ $= b$ সে.মি. ; এবং উচ্চতা $= c$ সে.মি.।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $4a + 4b + 4c = 80$

$\therefore \quad a + b + c = 20$

$\because$ কর্ণ $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 10$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 100$

এক্ষণে, $\because \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$(20)^2 \qquad = 100 + 2(ab + bc + ca)$

$\therefore \quad 2(ab + bc + ca) = 400 - 100 = 300$

$\therefore$ সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 300$ বর্গ সে মি.।

উদা. 4. $4\frac{1}{2}' \times 4'$ ভিতরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থযুক্ত একটি চৌবাচ্চার ভিতরে একটি পাথরের ঘনক ছিল এবং ঐ চৌবাচ্চাটি ঘনক ও জলে পরিপূর্ণ ছিল। দ্বিতীয় একটি চৌবাচ্চার $\frac{3}{4}$ অংশ জলে পূর্ণ ছিল। পাথরটি প্রথমটি হইতে উঠাইয়া দ্বিতীয়টিতে স্থাপন করিলে, উহা কানায় কানায় জলে পূর্ণ হইল এবং প্রথমটিতে জলের উচ্চতা 3 ফুটে দাঁড়াইল। যদি দ্বিতীয়টিতে মোট 2000 পাউণ্ড জল ধরে, তবে ঘনকটির দৈর্ঘ্য কত এবং প্রথমটিতে কত জল ধরিবে?

(1 ঘন ফুট জলের ওজন 62·5 পাউণ্ড)

দ্বিতীয় চৌবাচ্চার মোট ভিতরের ঘনফল $= \dfrac{2000}{62 \cdot 5}$ বা 32 ঘন ফুট,

$\therefore$ উহার জল পূর্ণ ছিল $= 32$ ঘন ফুটের $\frac{3}{4}$ বা 24 ঘন ফুট

$\therefore$ অবশিষ্ট অংশের ঘনফল $= (32 - 24)$ বা 8 „ „

এক্ষণে, এই „ „ „ = ঘনকের ঘনফল।

মনে কর, ঘনকটির দৈর্ঘ্য $= a$ ফুট, $\therefore$ ঘনফল $= a^3$ ঘন ফুট

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $a^3 = 8$, $\qquad \therefore \quad a^3 = 2^3, \quad \therefore \quad a = 2$

$\therefore$ ঘনকটির দৈর্ঘ্য $= 2$ ফুট।

এক্ষণে, প্রথমটির মোট ঘনফল $= (4\frac{1}{2} \times 4 \times 3 + 8)$ ঘন ফুট $= 62$ ঘন ফুট।

$\therefore$ প্রথমটিতে মোট $62 \times 62 \cdot 5$ বা 3875 পাউণ্ড জল ধরিবে।

উদা. 5. দেওয়াল সমেত একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 12′ ও প্রস্থ 10′। ঐ ঘরে 4″ পুরু একটি ছাদ ঢালাই করিতে হইবে ; লোহার কড়ি (beam)-এর জন্যে বাড়তি ঘনফল বাদ দিলে ও ছাদ তৈয়ারীর নিমিত্ত লোহার খাঁচার মোট ঘনফল 4 ঘন ফুট হইলে এবং প্রয়োজনীয় সিমেণ্ট, বালি ও পাথরকুচির ঘনফলের অনুপাত যথাক্রমে 1 : 2 : 3 হইলে, কত বস্তা সিমেণ্ট, বালি ও পাথরকুচি লাগিয়াছিল ?

(প্রতি বস্তা সিমেণ্ট বা বালি অথবা পাথরকুচির ঘনফল $1\frac{1}{5}$ ঘন ফুট। সিমেণ্ট, বালি ইত্যাদি মাথাইবার জন্য জলের ঘনফল অগ্রাহ্য কর।)

ছাদের মোট ঘনফল $= 12 \times 10 \times \frac{4}{12}$ ঘন ফুট $= 40$ ঘন ফুট।

$\because$ লোহার খাঁচার ঘনফল $= 4$ ঘন ফুট,

$\therefore$ সিমেণ্ট + বালি + পাথরকুচির ঘনফল $= (40 - 4)$ বা 36 ঘন ফুট।

$\therefore$ সিমেণ্টের ঘনফল $= 36$ ঘন ফুটের $\frac{1}{1+2+3}$ বা 6 „ „

বালির „ $= 36$ ঘন ফুটের $\frac{2}{1+2+3}$ বা 12 „ „

এবং পাথরকুচির „ $= 36$ ঘন ফুটের $\frac{3}{1+2+3}$ বা 18 „ „

$\therefore$ সিমেণ্ট লাগিবে $(6 \div \frac{6}{5})$ বা 5 বস্তা

বালি „ $(12 \div \frac{6}{5})$ বা 10 „

এবং পাথরকুচি „ $(18 \div \frac{6}{5})$ বা 15 „

অনুশীলনী 2

1. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 20 সে.মি., $12\frac{1}{2}$ সে.মি. ও 10 সে.মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

2. 10 সে.মি. দৈর্ঘ্য, 4 সে.মি. প্রস্থ ও $\frac{1}{5}$ সে.মি. পুরু 1000 থানা সোনার পাত গলাইয়া একটি ঘনক তৈয়ারী করা হইলে, ঐ ঘনকের প্রান্তরেখা কত হইবে ?

3. 15 সে.মি. × 12 সে.মি. × 4 সে.মি. মাপের একটি সমকোণী চৌপল আকৃতি ষ্টীলের পদার্থ হইতে কতগুলি 12 সে.মি. × 12 সে.মি. × $\frac{1}{8}$ সে.মি. ষ্টীলের পাত তৈয়ারী করা যাইবে ?

4. কোন ঘনকের সমগ্র পৃষ্ঠফল 8 বর্গ ফুট 24 বর্গ ইঞ্চি হইলে, উহার ধারের মাপ কত হইবে ?

5. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত যথাক্রমে 5 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 992 বর্গ সে.মি. হইলে, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত হইবে ?

6. কোন সমকোণী চৌপলের খাড়া তলগুলির পরিমাণ 1400 বর্গ সে. মি.। যদি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 : 1 হয় হয়, তবে উহার ঘনফল কত হইবে ?

7. কোন ঘরের ভিতরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 30 ফুট, 24 ফুট এবং 18 ফুট। ঐ ঘরের মধ্যে দীর্ঘতম কি মাপের কাঠ রাখা যাইতে পারে ?

[W. B. S. F. 1974]

8. 6 সে.মি. × 5 সে.মি. × 4 সে.মি. ও 8 সে.মি. × 4 সে.মি. × 3 সে.মি. মাপের দুইটি ধাতব সমকোণী চৌপল গলাইয়া একটি ঘনক তৈয়ারী করিলে, উহার কর্ণ কত হইবে ?

9. কোন সমকোণী চৌপলের কর্ণ 30 সে.মি. এবং ধারগুলির সমষ্টি 200 সে.মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠফল কত ?

10. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 1 সে.মি., 4 সে.মি. ও 2 সে.মি. হইলে, উহার সমান ঘনফল বিশিষ্ট ঘনকের প্রান্তরেখা কত হইবে ?

11. কোন সমকোণী চৌপলের মাত্রাগুলির অনুপাত যথাক্রমে 3 : 5 : 7 এবং ঘনফল 2835 ঘন সে.মি. হইলে, মাত্রাগুলি কত হইবে ?

12. কোন সমকোণী চৌপলের ঘনফল 144 ঘন সে.মি., উহার ভূমির ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা যথাক্রমে 12 বর্গ সে.মি. ও 14 সে.মি. হইলে, কর্ণ কত হইবে ?

13. কোন সমকোণী চৌপলের ঘনফল 2160 ঘন ফুট, কর্ণ 25 ফুট। যদি উহার দৈর্ঘ্য 20 ফুট হয়, তবে প্রস্থ ও উচ্চতা কত ?

14. যে ঘনকের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল একই সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা যায়, উহার মাত্রা কত হইবে ?

15. কোন সমকোণী চৌপলের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 22 বর্গ ইঞ্চি ও ঘনফল 6 ঘন ইঞ্চি। যদি ইহার একটি কর্ণ $\sqrt{14}$ ইঞ্চি হয়, তবে উহার মাত্রাগুলি কত হইবে ?

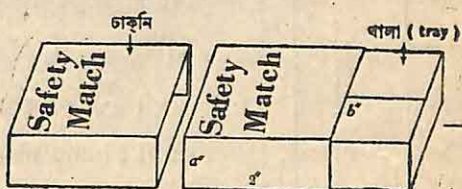
16. 5 মিটার দৈর্ঘ্য, 4 মিটার প্রস্থ ও 2 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট জলপূর্ণ চৌবাচ্চা হইতে কত লিটার জল তুলিয়া ফেলিলে, উচ্চতা 50 সে.মি.-তে দাঁড়াইবে? যদি প্রতি মিনিটে 180 লিটার জল তুলিয়া ফেলা হয়, তবে কত সময়ে পূর্ণ চৌবাচ্চা হইতে উপরোক্ত অবস্থা প্রাপ্ত হইবে? (জলের 1 ঘন ডেসি.মি. = 1 লিটার)

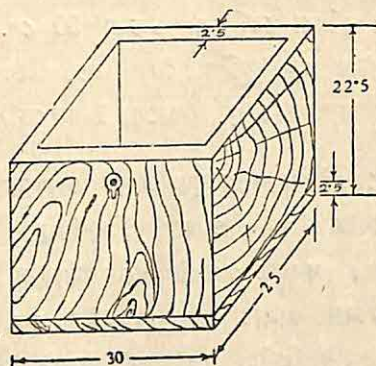
17. $7' \times 6'$ ভিতরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থযুক্ত একটি চৌবাচ্চার ভিতরে একটি ধাতব ঘনক ছিল এবং ঐ চৌবাচ্চাটি ঘনক ও জলে পরিপূর্ণ ছিল। দ্বিতীয় একটি চৌবাচ্চা $\frac{9}{10}$ অংশ জলে পূর্ণ ছিল। ঘনকটি প্রথমটি হইতে উঠাইয়া দ্বিতীয়টিতে স্থাপন করিলে, দ্বিতীয় চৌবাচ্চাটিও কানায় কানায় জল পূর্ণ হইল এবং প্রথমটির জলের উচ্চতা $4\frac{1}{2}$ ফুটে দাঁড়াইল। যদি দ্বিতীয় চৌবাচ্চায় মোট 16875 পাউণ্ড জল ধরে, তবে ঘনকটির দৈর্ঘ্য কত এবং প্রথমটিতে মোট কত জল ধরিবে?

(1 ঘন ফুট জলের ওজন 62·5 পাউণ্ড)

18. দেওয়াল সমেত একটি ঘরের দৈর্ঘ্য $13\frac{1}{2}'$ ও প্রস্থ $10\frac{1}{2}'$; ঐ ঘরে 4" পুরু একটি ছাদ ঢালাই করিতে হইবে। লোহার কড়ি (beam)-এর জন্য বাড়তি ঘনফল বাদ দিলে ও ছাদ তৈয়ারীর নিমিত্ত লোহার খাঁচার মোট ঘনফল $5\frac{1}{4}$ ঘনফুট হইলে এবং প্রয়োজনীয় সিমেণ্ট, বালি ও পাথরকুচির ঘনফলের অনুপাত যথাক্রমে 1 : 2 : 3 হইলে, কত বস্তা সিমেণ্ট, বালি ও পাথরকুচি লাগিয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

(প্রতি বস্তা সিমেণ্ট বা বালি অথবা পাথরকুচির ঘনফল $1\frac{1}{8}$ ঘনফুট। সিমেণ্ট, বালি ইত্যাদি মাখাইবার জন্য জলের ঘনফল অগ্রাহ্য কর।)

19. 2" দীর্ঘ একটি দিয়াশলাই বাক্স একটি ঢাক্‌নি ও একটি থালা দ্বারা গঠিত। যদি থালা ও ঢাক্‌নির উভয়েই a'' গভীরতা ও b'' প্রস্থ যুক্ত হয়, তবে বাক্সটি যে পদার্থে গঠিত, উহার বেধ অগ্রাহ্য করিয়া দেখাও যে, পদার্থটির প্রয়োজনীয় ক্ষেত্রফল $(10a+6b+2ab)$ বর্গ ইঞ্চি (ঢাক্‌নির একটি খাড়াতল দুই বার করিয়া পদার্থ টি দ্বারা জড়ানো অবস্থায় গঠিত)।

20. চিত্রে ঢাক্‌না ছাড়া একটি বাক্সের ছবি দেওয়া আছে এবং উহার মাপের

একক সেন্টিমিটারে দেওয়া আছে। 1 ঘন ডেসি.মি. কাঠের মূল্য 160 পয়সা

হইলে, ঢাকনা বাদ দিয়া কাঠদ্বারা ঐ বাক্সটি তৈয়ারী করিবার জন্য আমাকে কমপক্ষে কত টাকার কাঠ ক্রয় করিতে হইবে ?

3. লম্বব্বত্তাকার চোঙ

3.1. লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (Right Circular Cylinder) **:** কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে স্থির রাখিয়া এবং ঐ স্থির বাহুর চারিদিকে আয়তক্ষেত্রটিকে পূর্ণ একবার ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** বলে। স্থির বাহুটিকে উপরোক্ত চোঙের **অক্ষ** (axis) হিসাবে ধরা হয়।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, AOCC′ আয়তক্ষেত্র। $\overline{OA}$-কে স্থির রাখিয়া ইহার বিপরীত বাহু $\overline{CC'}$-কে পূর্ণ একবার ঘুরাইবার ফলে লম্ব বৃত্তাকার চোঙটি উৎপন্ন হইয়াছে।

এস্থলে $\overleftrightarrow{OA}$-কে **অক্ষ** (axis) এবং $\overline{CC'}$-কে **উৎপাদক রেখা** (generating line) বলা হয়।

$\overline{OC} \cong \overline{AC'}$ = বৃত্তাকার প্রান্ততল দুইটির ব্যাসার্ধ।

$\overline{OA} \cong \overline{CC'}$ = চোঙের উচ্চতা।

এক্ষণে, বৃত্তাকার সমান প্রান্ততল দুইটির যে কোন একটিকে ভূমি, ভূমির ব্যাসার্ধকে r একক এবং উচ্চতাকে h একক লইয়া আমরা পাই,

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের—

1. বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা

$= 2\pi r \times h$ বর্গএকক

$= 2\pi rh$ বর্গএকক।

2. সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + বৃত্তাকার প্রান্ততলদ্বয়ের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh$ বর্গএকক $+ 2 \times \pi r^2$ বর্গএকক

$= 2\pi r(h + r)$ বর্গএকক।

3. ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2$ বর্গএকক $\times h$ একক

$= \pi r^2 h$ ঘন একক।

উদা. 1. কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে. মি. এবং উচ্চতা 10 সে. মি. হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত হইবে?

এখানে, ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 7$ সে. মি. ; উচ্চতা $h = 10$ সে. মি.।

$\because$ কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক

$\therefore$ চোঙটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10$ বর্গ সে. মি.

$= 440$ বর্গ সে. মি.।

উদা. 2. কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 10·8 ডেসি.মি. এবং উচ্চতা 8·6 ডেসি.মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

এখানে ভূমির ব্যাসার্ধ $r = \frac{10 \cdot 8}{2}$ ডেসি.মি. $\left(\because \text{ ব্যাসার্ধ} = \frac{\text{ব্যাস}}{2}\right)$

$= 5 \cdot 4$ " "

উচ্চতা $h = 8 \cdot 6$ " "

$\because$ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(h + r)$ বর্গএকক

$\therefore$ চোঙটির সমগ্র পৃষ্ঠফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \cdot 4 \times (8 \cdot 6 + 5 \cdot 4)$ বর্গ ডেসি.মি.

$= \frac{2 \times 22 \times 5 \cdot 4 \times 14}{7}$ বর্গ ডেসি.মি.।

$= 475 \cdot 2$ বর্গ ডেসি.মি.।

আবার, $\because$ চোঙের ঘনফল $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$\therefore$ ঐ চোঙটির ঘনফল $= \frac{22}{7} \times (5 \cdot 4)^2 \times 8 \cdot 6$ ঘন ডেসি.মি.

$= 788 \cdot 153$ ঘন ডেসি.মি. (প্রায়)।

উদা. 3. 15 সে. মি., 10 সে. মি., 7 সে. মি. মাত্রাবিশিষ্ট সমকোণী চৌপলের সমান আয়তনবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ 5 সে. মি. হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

সমকোণী চৌপলের ঘনফল $= 15 \times 10 \times 7$ ঘন সে. মি.

এখানে, চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 5$ সে. মি.

মনে কর, চোঙের উচ্চতা $= h$ সে. মি.

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\pi \times 5^2 \times h = 15 \times 10 \times 7$ $\therefore$ $h = \frac{147}{11}$ সে. মি.

$\therefore$ বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \pi \times 5 \times \frac{147}{11}$ বর্গ সে. মি.

$= 420$ বর্গ সে. মি.।

উদা. 4. কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2310 বর্গ সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 30 সে. মি. হইলে, উহার উচ্চতা এবং ঘনফল কত হইবে ?

চোঙের ভূমির পরিধি $= 2\pi r = \pi \times 2r$

$= \pi \times 30$ সে. মি. ($\because$ ব্যাস $= 2 \times$ ব্যাসার্ধ)

$\therefore$ চোঙের উচ্চতা $= 2310 \div 30\pi = \frac{49}{2} = 24{\cdot}5$ সে. মি.

এবং চোঙের ঘনফল $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (15)^2 \times \frac{49}{2}$ ঘন সে. মি.

$= \dfrac{22 \times 225 \times 49}{7 \times 2}$ ঘন সে. মি.

$= 17325$ ঘন. সে. মি.।

উদা. 5. একটি 12 ফুট দীর্ঘ লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রের উভয় দিক খোলা ছিল। উহার ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 10 ইঞ্চি ও 1 ফুট। উহার বহিঃপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ওজন নির্ণয় কর। (C. U. 1953)

(যে পদার্থ দ্বারা উহা গঠিত উহার 1 ঘনফুটের ওজন $3\frac{1}{2}$ পাউণ্ড)

বহিঃপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \pi \times 1 \times 12$ বর্গফুট $= 2 \times \frac{22}{7} \times 1 \times 12$ বর্গফুট

$= 75\frac{3}{7}$ বর্গফুট

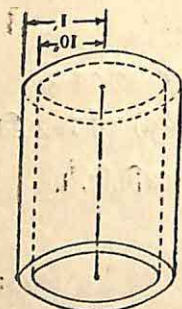
পদার্থ টির ঘনফল $= \{\pi \times (1)^2 \times 12 - \pi \times (\frac{10}{12})^2 \times 12\}$ ঘনফুট

$= \pi \times 12 \times \{(1)^2 - (\frac{10}{12})^2\}$ "

$= \pi \times 12 \times \{(1 + \frac{10}{12})(1 - \frac{10}{12})\}$ "

$= \frac{22}{7} \times 12 \times \{\frac{22}{12} \times \frac{2}{12}\}$ "

$= \frac{242}{21}$ ঘনফুট

$\therefore$ চোঙটির ওজন $= \frac{242}{21} \times \frac{7}{2}$ পাউণ্ড $= 40\frac{1}{3}$ পাউণ্ড।

উদা. 6. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে 21800 ঘন সে. মি. জল ছিল। ঐ পাত্রে 7 সে. মি. একটি ঘনক ফেলিয়া দিলে, উহা সম্পূর্ণরূপে ডুবিয়া গেল এবং ইহাতে 143 ঘন সে. মি. জল উপছাইয়া পড়িল। যদি ঐ পাত্রের ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার অনুপাত যথাক্রমে $1 : 7$ হয়, তবে জলের উচ্চতা কত ছিল ?

ঘনকের ঘনফল $= 7^3$ ঘন সে. মি. $= 343$ ঘন সে. মি.।

যদি 143 ঘন সে. মি. জল উপছাইয়া পড়ে, তবে ঘনকটি ডুবিবার পূর্বে ঐ পাত্রটির $(343 - 143)$ ঘন সে. মি. বা 200 ঘন সে. মি. আয়তন জলশূন্য ছিল।

$\therefore$ সমগ্র চোঙটিতে মোট $(21800 + 200)$ ঘন সে. মি. বা 22000 ঘন সে. মি. জল ধরিবে।

সর্তানুসারে, যদি চোঙটির x সে. মি. ব্যাসার্ধ ধরা হয়, তবে $7x$ সে. মি. উচ্চতা হইবে।

$\therefore$ চোঙটির ঘনফল $= \pi \times x^2 \times 7x$ ঘন সে. মি.

$\therefore \quad \pi \times x^2 \times 7x = 22000$

$\therefore \quad x^3 = 1000 \qquad \therefore \quad x = 10$ সে. মি.

অর্থাৎ, ব্যাসার্ধ $= 10$ সে. মি. এবং উচ্চতা $= 10 \times 7$ বা 70 সে. মি.

এক্ষণে, $\frac{22}{7} \times 10^2 \times h = 200$ ($h =$ পূর্বের জলশূন্য অংশের উচ্চতা)

$\therefore \quad h = \dfrac{200 \times 7}{10^2 \times 22}$ সে. মি. $= \frac{7}{11}$ সে. মি.

$\therefore$ উহাতে জলের উচ্চতা ছিল $= (70 - \frac{7}{11})$ সে. মি. $= 69\frac{4}{41}$ সে. মি.।

অনুশীলনী 3

1. কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ 14 সে. মি. এবং উচ্চতা 14 সে. মি. হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

2. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস $3\frac{1}{2}$ সে. মি. এবং উচ্চতা $8\frac{1}{4}$ সে. মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

3. 20 সে মে., 15 সে. মি. ও 8 সে. মি. মাত্রাযুক্ত সমকোণী চৌপলের সমান আয়তন বিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ 10 সে. মি. হইলে, উহার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

4. 1 ঘন ইঞ্চি সোনা হইতে 1000 গজ লম্বা সরু সোনার তার তৈয়ারী করা হইল। ঐ তারের ব্যাস কত হইবে ? (C. U. 1958)

5. 2 মিটার দীর্ঘ ও 1 মিটার ব্যাস বিশিষ্ট একটি লোহার রোলার 350 বার ঘুরিয়া কতটুকু জায়গা সমতল করিবে ?

6. একটি বেলনাকার স্তম্ভের উচ্চতা 10 ফুট ও ব্যাস $3\frac{1}{2}$ ফুট। যদি প্রতি বর্গফুট রঙ্গীন কাগজের মূল্য 4 পয়সা হয়, তবে ঐ স্তম্ভটি কাগজ দ্বারা মুড়িতে কমপক্ষে কত টাকার কাগজ লাগিবে ?

7. কোন লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতল 1000 বর্গ সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 20 সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল নির্ণয় কর। (C. U. 1934)

8. একটি লোহার নলের ভিতরের ব্যাস 3 সে. মি. এবং উচ্চতা 2·4 মিটার। যে লোহার পাত দ্বারা নলটি গঠিত উহা $\frac{1}{2}$ সে. মি. পুরু হইলে, লোহার পাতের ঘনফল কত হইবে ? (W. B. S. F. 1971)

9. একটি বেলনাকার স্তম্ভের উচ্চতা 16 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 7 ফুট। যদি ঐ স্তম্ভটি নির্মাণ করিতে প্রতি ঘনফুটে 2·25 টাকা খরচ পড়ে। তবে উহা তৈয়ারী করিতে মোট কত খরচ পড়িল ? [W. B. S. F. (Addl.) 1971]

10. কোন লম্ব বৃত্তাকার ঘন চোঙাকৃতি বস্তুর ভূমির ব্যাস 7 ফুট। যদি উহা নির্মাণ করিতে প্রতি ঘনফুটে $2\frac{1}{2}$ টাকা হিসাবে মোট 1078 টাকা খরচ পড়ে, তবে উহার উচ্চতা কত হইবে ?

11. একটি 28 সে. মি. দীর্ঘ লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি নলের ভিতরের ও বাহিরের ব্যাস যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 7 সে. মি. হইলে, উহার বাহিরের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও সমগ্র নলটির ওজন কত হইবে ?

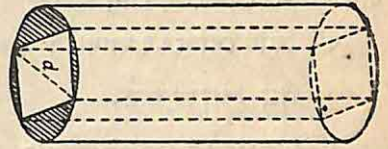
(যে পদার্থ দ্বারা নলটি গঠিত উহার 1 ঘন সে. মি.-র ওজন 8·9 গ্রাম।)

12. $\frac{4\pi}{3} \times 6^3$ ঘন ইঞ্চি আয়তনের নিরেট একটি বস্তু হইতে কতগুলি 8″ দৈর্ঘ্য ও 6″ ব্যাস বিশিষ্ট নিরেট বেলন প্রস্তুত করা যাইবে ? (C. U. 1952)

13. একটি ধাতব লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙ হইতে 50টি সমান গোলাকার চাক্‌তি প্রস্তুত করা হইল। যদি চোঙটির ব্যাসার্ধ চাক্‌তির ব্যাসের সমান হয়, তবে দেখাও যে, প্রত্যেকটি চাক্‌তির বেধ চোঙের উচ্চতার $\frac{2}{25}$ অংশ হইবে ?

14. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে 1405 লিটার জল ছিল। ঐ পাত্রে 20 সে. মি. ধারবিশিষ্ট একটি ধাতব ঘনক ফেলিয়া দিলে, উহা সম্পূর্ণরূপে ডুবিয়া

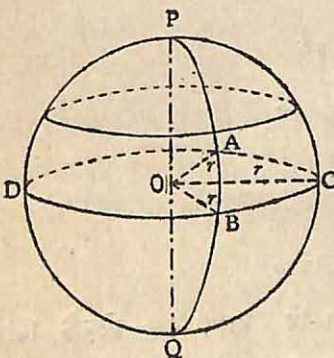
গেল এবং ইহাতে 5 লিটার জল উপ্‌ছাইয়া পড়িল। যদি ঐ পাত্রের ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার অনুপাত যথাক্রমে 1 : 7 হয়, তবে ঐ পাত্রের উচ্চতা কত এবং প্রথমে জলের উচ্চতাই বা কত ছিল ?

15. 7 সে. মি. উচ্চতা এবং $\sqrt{18}$ সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট কোন নিরেট তামার বেলন হইতে ঐ একই উচ্চতাযুক্ত ও বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি সমকোণী চৌপল তৈয়ারী করিতে হইলে, কমপক্ষে কতটুকু পরিমাণ তামা কাটিয়া ফেলিতে হইবে ?

16. একটি 20′ লম্বা লোহার নলের ভিতরের ব্যাস 3″ এবং ইহা $\frac{1}{2}$″ পুরু। যদি এক ঘন ইঞ্চি লোহার ওজন 4 আউন্স হয়, তবে নলটির ওজন কত ?

[W. B. S. F. (Addl.) 1970]

17. 4″ ধারবিশিষ্ট একটি তামার ঘনক গলাইয়া $\frac{2''}{11}$ ব্যাসার্ধযুক্ত একটি তার প্রস্তুত করা হইলে, উক্ত তারের দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

4. গোলক

4.1. গোলক (Sphere) : অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া, ঐ ব্যাসের চারিদিকে অর্ধবৃত্তটিকে পূর্ণ একবার ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, উহাকে **গোলক** বলে।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, PQ ব্যাসকে স্থির রাখিয়া, PABQ অর্ধবৃত্তটিকে পূর্ণ একবার ঘুরাইবার ফলে PCQD গোলকটি উৎপন্ন হইয়াছে।

এক্ষণে, উৎপন্ন গোলকের কেন্দ্র-বিন্দু (O) এবং অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু একই হইবে।

এখানে O, অর্ধবৃত্ত PABQ এবং গোলক PCQD উভয়েরই কেন্দ্র।

অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ, উৎপন্ন গোলকেরও ব্যাসার্ধ। কেন্দ্র হইতে বক্রপৃষ্ঠের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা সমান।

সুতরাং, $\overline{OP} \cong \overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OQ} \cong \overline{OC}$.

বক্রপৃষ্ঠের উভয়দিকের তলদ্বারা সীমাবদ্ধ কেন্দ্রগামী সরলরেখাকে গোলকের ব্যাস বলে। $\overline{PQ}$ গোলকের ব্যাস।

যদি কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r একক ধরা হয় তবে,

কোন গোলকের—

1 **বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** $= 4\pi \times$ (**ব্যাসার্ধ** $)^2$

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক।

2 **ঘনফল** $= \frac{4}{3}\pi \times$ (**ব্যাসার্ধ** $)^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

উদা. 1. কোন গোলকের ব্যাসার্ধ 21 সে. মি. হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল কত হইবে?

এখানে, ব্যাসার্ধ $r = 21$ সে. মি.।

$\because$ গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ গোলকটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4.\frac{22}{7}.(21)^2$ বর্গ সে. মি.

$= 5544$ বর্গ সে. মি.

এবং ঘনফল $= \frac{4}{3}.\frac{22}{7}.(21)^3 = 38808$ ঘন সে. মি.।

উদা. 2. একটি গোলকের বক্রতল 616 বর্গ সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

$\because$ গোলকর বক্রতল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $4\pi r^2 = 616$

অথবা, $r^2 = \frac{616}{4\pi} = \frac{616 \times 7}{4 \times 22} = 7^2$

$\therefore \ r = 7$

$\therefore$ ঘনফল $= \frac{4}{3}.\frac{22}{7}.(7)^3 = 1437\frac{1}{3}$ ঘন সে. মি.।

উদা. 3. 1 সে. মি., 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. ব্যাসার্ধযুক্ত তিনটি নিরেট স্বর্ণগোলক গলাইয়া একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ কত? (C. U. '56, '61)

মনে কর, v_1, v_2 এবং v_3 যথাক্রমে গোলক তিনটির ঘনফল ; R এবং V যথাক্রমে নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ ও ঘনফল।

∴ সর্তানুসারে, $V = v_1 + v_2 + v_3$

∴ $\frac{4}{3}\pi.(R)^3 = \frac{4}{3}\pi.(1)^3 + \frac{4}{3}\pi.(6)^3 + \frac{4}{3}\pi.(8)^3.$

∴ $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\{1^3 + 6^3 + 8^3\}$

∴ $R^3 = 729 = 9^3$ ∴ $R = 9$ সে. মি.

∴ নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ 9 সে. মি.।

উদা. 4. কোন গম্বুজ একটি চোঙাকার 4 মি. উচ্চ দেওয়াল ও ঐ দেওয়ালের উপর এবং উহার সমান অন্তর্ব্যাসার্ধযুক্ত একটি অর্ধগোলকাকার ছাদ দ্বারা গঠিত। যদি ঐ অর্ধ-গোলকাকার ছাদের ভিতরের বক্রতল 277·97 বর্গ মি. হয়, তবে ঐ গম্বুজের ভিতরটা প্রতি বর্গ মি. 40 প. হিসাবে চুণকাম করিতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

এখানে, গম্বুজের মেঝের ব্যাসার্ধ = অর্ধ-গোলকাকার ছাদের ভিতরের ব্যাসার্ধ।

∵ অর্ধ-গোলকাকার ছাদের ভিতরের ক্ষেত্রফল = 277·97 বর্গ মি.,

∴ $\frac{1}{2}.4\pi.r^2 = 277{\cdot}97$

∴ $r^2 = \frac{277{\cdot}97}{2\pi} = \frac{277{\cdot}97 \times 7}{2 \times 22}$

$= 44{\cdot}2225 = (6{\cdot}65)^2$

∴ $r = 6{\cdot}65$ মি.

∴ চোঙাকার দেওয়ালের ভিতরের মেঝের ব্যাসার্ধও 6·65 মি. হইবে।

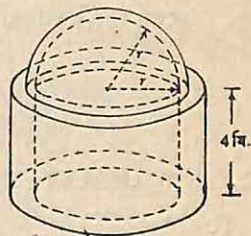
∴ ভিতরের চোঙাকার বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times 6{\cdot}65 \times 4$ বর্গ মি.

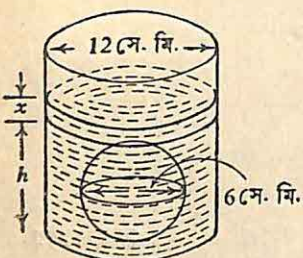
$= 167{\cdot}2$ বর্গ মি.।

∴ ভিতরের সমগ্র বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= (167{\cdot}2 + 277{\cdot}97)$ বর্গ মি.

$= 445{\cdot}17.$

∴ ভিতরটা চুণকাম করিতে মোট ব্যয় হইবে $(445{\cdot}17 \times 40)$ প.

$= 178{\cdot}07$ টাকা (প্রায়)।

উদা. 5. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাস 12 সে. মি. এবং উহার মধ্যে কিছু পরিমাণ জল আছে। এখন 6 সে. মি. ব্যাসযুক্ত একটি গোলক ঐ জলের

মধ্যে সম্পূর্ণরূপে ডুবাইয়া দিলে পরে জলের উপরিতল আর যতদূর উপরে উঠিবে তাহা নির্ণয় কর। (W. B. S. F. 1970)

মনে কর, প্রথমে চোঙের উচ্চতা ছিল $= h$ সে.মি. এবং গোলকটি ডুবাইবার পর x সে. মি. উচ্চতা বাড়িল।

$\therefore$ প্রথমে জলের আয়তন ছিল $= \pi.(\frac{12}{2})^2.h$ ঘন সে. মি.

গোলকটি ডুবাইবার পর মোট আয়তন হইল $= \pi.(\frac{12}{2})^2.(h+x)$ ঘন সে. মি.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(\frac{6}{2})^3$

$= \{\pi.(6)^2.(h+x) - \pi(6)^2.h\}$

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \pi.6^2.x \qquad \therefore \quad x = 1$

$\therefore$ জলের উপরিতল আরও 1 সে. মি. উপরে উঠিবে।

অনুশীলনী 4

1. কোন গোলকের ব্যাসার্ধ 14 সে. মি. হইলে, উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত হইবে?

2. কোন গোলকের ব্যাস 42 সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল কত হইবে?

3. একটি গোলকের ঘনফল 38808 ঘন সে. মি. হইলে, উহার ব্যাসার্ধ কত হইবে?

4. কোন অর্ধ-গোলকের ব্যাস 5·6 সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল কত হইবে?

5. একটি গোলকের বক্রতল 2464 বর্গ সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল কত হইবে?

6. যদি কোন গোলকের ঘনফল উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়, তবে ঐ গোলকের ব্যাসার্ধ কত হইবে? (C. U. 1953)

7. 1 সে. মি., 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. ব্যাসার্ধযুক্ত তিনটি নিরেট স্বর্ণগোলক একত্র গলাইয়া কোন একটি নিরেট গোলক তৈয়ারী করা হইল; এই নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ কত হইবে? (C. U. 1956)

8. 3 ডেসি মি. ব্যাসযুক্ত একটি নিরেট গোলক গলাইয়া তিনটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। যদি উহাদের মধ্যে দুইটির ব্যাস যথাক্রমে $1\frac{1}{2}$ ডেসি মি. ও 2 ডেসি মি. হয়, তবে তৃতীয়টির ব্যাস কত হইবে?

9. 6 ডেসি মি. ব্যাসবিশিষ্ট কোন নিরেট রৌপ্য গোলককে গলাইয়া $\frac{1}{100}$ ডেসি মি. পুরু একটি বৃত্তাকার রৌপ্যপাত প্রস্তুত করা হইলে, ঐ রৌপ্যপাতের ব্যাস কত হইবে? (W. B. S. F. 1972)

10. 4 সে. মি. ব্যাস ও 45 সে. মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন ধাতব নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙকে গলাইয়া 6 সে. মি. ব্যাসযুক্ত কতগুলি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা যাইবে? (W. B. C. S. 1966)

11. r ও r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি নিরেট গোলককে একত্র গলাইয়া একটিমাত্র নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইলে দেখাও যে, নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ $\sqrt[3]{r^3 + r'^3}$.

12. মাটির একটি নিরেট গোলাকৃতি পিণ্ড হইতে 16 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের একটি লম্ব বৃত্তাকার নিরেট চোঙ তৈয়ারী করা হইল। যদি চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ ও গোলকের ব্যাসার্ধ একই হইয়া থাকে, তবে উহাদের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধ কত? (C. U. 1949)

13. 4 ইঞ্চি ভূমির ব্যাস ও 9 ইঞ্চি উচ্চতাযুক্ত কোন নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ হইতে একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। ঐ গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. একটি গোলক ও একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ ও ঘনফল একই হইলে, চোঙের ব্যাস ইহার উচ্চতার শতকরা কত বেশী হইবে? (C. U. 1951)

15. কোন গম্বুজ একটি চোঙাকার 3 মিটার উচ্চ দেওয়াল ও ঐ দেওয়ালের উপর এবং উহার সমান অন্তর্ব্যাসার্ধযুক্ত একটি অর্ধগোলকাকার ছাদ দ্বারা গঠিত। যদি ঐ অর্ধগোলকাকার ছাদের ভিতরের বক্রতল 308 বর্গ মি. হয়, তবে ঐ গম্বুজের ভিতরটা প্রতি বর্গ মি. 50 প. হিসাবে চূণকাম করিতে মোট কত ব্যয় হইবে?

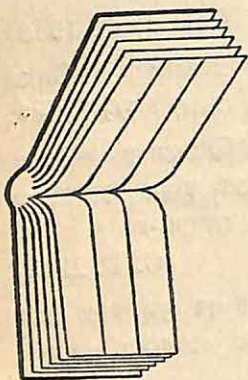
16 8 ইঞ্চি ব্যাস ও 1 ফুট উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রের অর্ধাংশ জলপূর্ণ ছিল। ঐ পাত্রে 1 ইঞ্চি ব্যাসযুক্ত কতটি পাথরের গুলি ফেলিলে, জলতল উপরের প্রান্ত পর্যন্ত উঠিবে? (W. B. S. F. 1969)

17. 1 ঘন সে. মি. তামার ওজন 8·88 গ্রাম হইলে, 1 সে. মি. পুরু ও 12 সে. মি. বহির্ব্যাসবিশিষ্ট একটি তাম্র নির্মিত অর্ধগোলকাকার খোলের ওজন কত হইবে? (W. B. C. S. 1967)

পরিশিষ্ট

5. জমির নক্সা হইতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

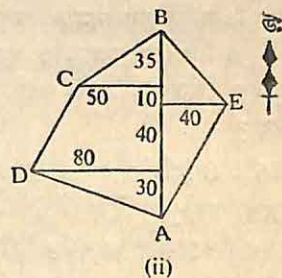
(ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফলের প্রয়োগ)

ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, আয়তক্ষেত্র, ট্রাপিজিয়ম, বৃত্ত ইত্যাদির ক্ষেত্রফল বাহির করিবার পদ্ধতি জানা থাকিলে, যে কোন জমির নক্সা (plan) হইতে ঐ জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

"ফিল্ড-বুক"

"ফিল্ড-বুক" আমিনের (Surveyor's) একটি অতি প্রয়োজনীয় খাতা। ইহার প্রত্যেক পৃষ্ঠার মধ্যস্থলে লম্বালম্বিভাবে দুইটি লাইন থাকে। ইহাতে কোন জমির মধ্যে অবস্থিত বাড়ী, পুকুর, গাছপালা ইত্যাদি সবকিছু তথ্য সংক্ষেপে দেওয়া থাকে। এই ফিল্ড-বুকে লিখিত প্রয়োজনীয় তথ্যাদি নীচ হইতে উপরের দিকে পঠিত হয়।

নিম্নে ফিল্ড-বুকে প্রদর্শিত কিছু তথ্য দেওয়া হইল।

(i)

(ii)

উপরোক্ত চিত্রে (ii) AEBCD বহুভুজাকৃতি কোন জমির সীমানা দেখান হইল। AB **"বেস-লাইন"** এবং A হইতে শুরু করিয়া ঐ লাইনের অভিমুখ উত্তরদিকে প্রদর্শিত হইল। $\overline{AB}$-র উপর D, C, E হইতে **অফ্‌সেট্‌গুলি** টানা হইল।

এক্ষণে, AEBCD পঞ্চভুজাকৃতি **জমির ক্ষেত্রফল** = চারিটি ত্রিভুজ + একটি ট্রাপি. ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}[70.40 + 45.40 + 35.50 + 30.80 + (80 + 50).50]$ ব. মি.

$= \frac{1}{2}[2800 + 1800 + 1750 + 2400 + 6500] = 7625$ ব. মি.।

অনুশীলনী 5

আমিনের "ফিল্ড-বুকের" নিম্নলিখিত তথ্যাদি হইতে জমির নক্সা প্রস্তুত কর এবং ঐ নক্সা হইতে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

1.

	মিটার	
স্টেশন	B পর্যন্ত	
	250	
E-তে 160	225	
	150	D-তে 120
	50	C-তে 90
স্টেশন	A	হইতে উত্তরদিক

2.

	মিটার	
স্টেশন	B পর্যন্ত	
	180	
E-তে 70	150	
	140	D-তে 60
F-এ 100	110	
	90	C-তে 80
G-তে 60	40	
স্টেশন	A	হইতে পূর্বদিক

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

1. 20 সে.মি., 30 সে.মি., 10 সে.মি.।
2. 124000 টাকা।
3. 3750 টাকা।
4. 5544 বর্গ গজ।
5. 1350 বর্গ মি., 36 মি., 37·5 মি.।
6. 20 মি., 13 মি.।
7. $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ মিনিট।
8. $1283\frac{1}{3}$ বর্গ সে.মি.।
9. 960·84 বর্গ ফুট (প্রায়)।
10. 21·2 সে.মি.।
11. 40 সে.মি.।
13. 71 : 80.
14. 24 মি.।

অনুশীলনী 2

1. 1150 বর্গ সে.মি., 2500 ঘন সে.মি. । 2. 20 সে.মি. ।
3. 40 খানি । 4. 1 ফুট 2 ইঞ্চি ।
5. 20 সে.মি., 12 সে.মি., 8 সে.মি. । 6. 12000 ঘন সে.মি. ।
7. 42·42 ফুট (প্রায়) । 8. 10·39 সে.মি. (প্রায়) ।
9. 1600 বর্গ সে.মি. । 10. 4 সে.মি. ।
11. 9 সে.মি., 15 সে.মি., 21 সে.মি. । 12. 13 সে.মি. ।
13. 12 ফুট, 9 ফুট । 14. 6 একক ।
15. 3 ইঞ্চি, 2 ইঞ্চি, 1 ইঞ্চি । 16. 30000 লিটার, 2 ঘ. 46 মি. 40 সে. ।
17. 3 ফুট, 13500 পাউণ্ড ।
18. সিমেন্ট 6 বস্তা, বালি 12 বস্তা, পাথরকুচি 18 বস্তা । 20. 11 টাকার ।

অনুশীলনী 3

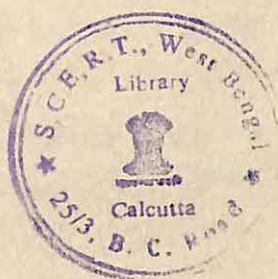
1. 1320 বর্গ সে.মি. । 2. 110 বর্গ সে.মি. ; $79\frac{13}{32}$ ঘন সে.মি. ।
3. $1108\frac{4}{7}$ বর্গ সে.মি. 4. ·006 ইঞ্চি (প্রায়) ।
5. 2200 বর্গ মিটার । 6. 4 টা. 40 প. ।
7. 5000 ঘন সে.মি. । 8. 1320 ঘন সে.মি. ।
9. 8174·55 টাকা (প্রায়) । 10. 12 ফুট ।
11. 616 বর্গ সে.মি. ; 2 কি.গ্রা. 545 গ্রা. 4 ডেসি গ্রা. ।
12. 4টি । 14. 280 সে.মি. ; $279\frac{71}{176}$ সে.মি. ।
15. 36 ঘন সে.মি. । 16. 330 পাউণ্ড । 17. 17 গজ 4 ইঞ্চি ।

অনুশীলনী 4

1. 2464 বর্গ সে.মি. । 2. 38808 ঘন সে.মি. । 3. 21 সে.মি. ।
4. 46 ঘন সে.মি. (প্রায়) । 5. $11498\frac{2}{3}$ ঘন সে.মি. । 6. 6 একক ।
7. 9 সে.মি. । 8. 2·5 ডেসি মি. । 9. 120 ডেসি মি. ।
10. 5. 12. 12 ইঞ্চি ।
13. 113·14 বর্গ ইঞ্চি (প্রায়) । 14. 50%. 15. 220 টাকা ।
16. 576টি । 17. 1 কি.গ্রা. 693·12 গ্রা. ।

অনুশীলনী 5

1. 38750 বর্গ মি. । 2. 19550 বর্গ মি. ।

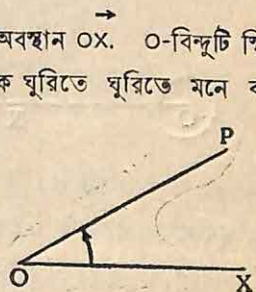
ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

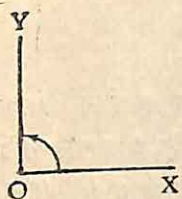
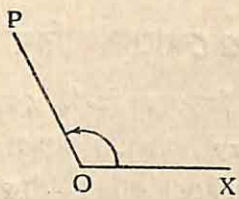
কোণ ও কোণের পরিমাপ

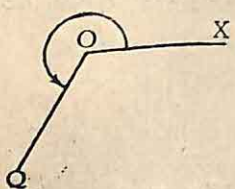
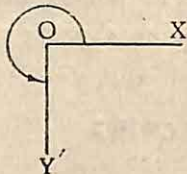
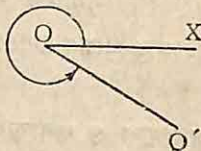
1.1. তোমরা জান একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহু আছে। ত্রিকোণমিতির (Trigonometry) সাহায্যে আমরা ইহাদের পারস্পরিক সম্বন্ধ, ত্রিভুজের পরিমাণ ইত্যাদি জানিতে পারি। গ্রীক ভাষার Trigonom (=triangle) অর্থাৎ ত্রিভুজ এবং metron (=I measure) অর্থাৎ আমি মাপি, এই দুই শব্দ হইতে Trigonometry শব্দটির উৎপত্তি। বর্তমানে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ ব্যাপকতর হইয়াছে। শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ বা পরিমাপ বিষয়ক সমস্যার আলোচনাতেই ইহা সীমাবদ্ধ নয়। অধিকন্তু গণিতশাস্ত্রের বিভিন্ন বিভাগে কোণ সম্বন্ধীয় নানাপ্রকার প্রশ্নের সমাধানে ইহার ব্যবহার হয়।

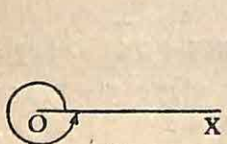
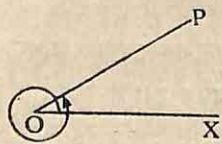
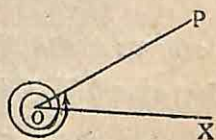
1.2. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ :

জ্যামিতিতে কোণের পরিমাপ $0°$ হইতে $360°$-র মধ্যে হইয়া থাকে। ইহা ছাড়া কোণকে সর্বদা ধনাত্মক ধরা হয়। কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা আরও ব্যাপকতর—জ্যামিতিক কোণের অর্থ সম্প্রসারিত করিয়া ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এবং সর্বপরিমাপের কোণ ত্রিকোণমিতির আলোচনায় ব্যবহার করা হয়।

মনে কর, কোন ঘূর্ণায়মান সরলরেখার প্রাথমিক অবস্থান $\overrightarrow{OX}$. O-বিন্দুটি স্থির থাকিয়া ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে ঘুরিতে ঘুরিতে মনে কর $\overrightarrow{OX}$-রেখাটি বর্তমানে $\overrightarrow{OP}$ হইয়াছে। এইরূপ ঘূর্ণনকে **বামাবর্ত** (anti-clockwise) ঘূর্ণন বলে। পার্শ্ববর্তী চিত্রে $\angle XOP$ কোণটি একটি সূক্ষ্মকোণ। পরের পৃষ্ঠায় ঘূর্ণায়মান সরলরেখার দ্বারা উৎপন্ন বিভিন্ন পরিমাপের কোণের চিত্র দেওয়া হইল।

চিত্র 1

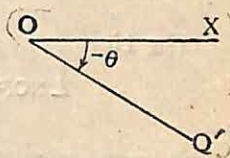
ঘূর্ণায়মান সরলরেখা $\overrightarrow{OX}$ আর একটু ঘুরিয়া OY অবস্থানে আসিয়া ∠XOY = 1 সমকোণ করিয়াছে (চিত্র 2)। এই রেখা আরও ঘুরিয়া $\overrightarrow{OP'}$ ও $\overrightarrow{OX'}$-এর

চিত্র 2 চিত্র 3 চিত্র 4

উপর সমাপতিত হইয়া যথাক্রমে ∠XOP' (চিত্র 3) ও ∠XOX' (চিত্র 4) উৎপন্ন করিয়াছে। ∠XOP' একটি স্থূল কোণ ও ∠XOX' একটি সরলকোণ

চিত্র 5 চিত্র 6 চিত্র 7

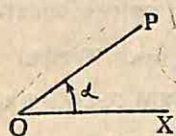
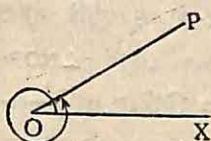
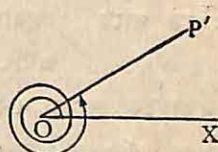
(= 2 সমকোণ)। এইরূপে ∠XOQ কোণটি দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু তিন সমকোণ অপেক্ষা ছোট (চিত্র 5), ∠XOY' = 3 সমকোণ (চিত্র 6), ∠XOQ' তিন সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ছোট (চিত্র 7)।

চিত্র 8 চিত্র 9 চিত্র 10

ঘূর্ণায়মান রেখাটি এইভাবে ঘুরিয়া যখন OX অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে তখন চার সমকোণ সৃষ্ট হইবে (চিত্র 8)। রেখাটি যদি ইহার পরেও ঘুরিতে থাকে এবং OP অবস্থানে পুনরায় ফিরিয়া আসে তাহা হইলে, কোণের পরিমাপ হইবে চার সমকোণ + ∠XOP. এইভাবে রেখাটি যদি দুইবার বামাবর্তে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OP}$-র উপর

সমাপতিত হয়, তবে কোণের পরিমাপ হইবে 8 সমকোণ + ∠XOP. লক্ষ্য কর, ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ এইভাবে যে-কোনও পরিমাপের কোণ সৃষ্টি করিতে পারে। অর্থাৎ ত্রিকোণমিতিতে যে-কোনও পরিমাপের কোণ হইতে পারে।

আবার ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইদিকে ঘুরিয়া মনে কর OQ′ অবস্থানে আসিল। এইরূপ ঘূর্ণনকে **দক্ষিণাবর্তী** (clockwise) ঘূর্ণন বলে। প্রচলিত রীতি অনুসারে বামাবর্ত ঘূর্ণন দ্বারা উৎপন্ন কোণকে **ধনাত্মক** (positive) কোণ ও দক্ষিণাবর্তী ঘূর্ণন দ্বারা উৎপন্ন কোণকে **ঋণাত্মক** (negative) কোণ বলে। পার্শ্ববর্তী চিত্রে ∠XOQ′-এর পরিমাপ ঋণাত্মক ($= -\theta$), এবং পূর্ববর্তী চিত্রগুলিতে বামাবর্ত ঘূর্ণন দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলির পরিমাপ সব কয়টিই ধনাত্মক।

চিত্র 11

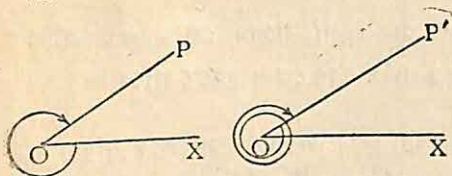
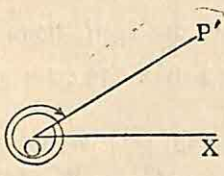
1.3. সমপ্রান্ত্য কোণ :

মনে কর, কোন ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ বামাবর্তে ঘুরিয়া OP অবস্থানে আসিয়া সূক্ষ্মকোণ ∠XOP $=\alpha$ সৃষ্টি করিয়াছে (চিত্র 12)। আবার 13 চিত্রে $\vec{OX}$ রেখাটি

চিত্র 12 চিত্র 13 চিত্র 14

বামাবর্তে O-বিন্দুর চারিপাশে একবার সম্পূর্ণ ঘুরিয়া OP অবস্থানে আসিয়াছে। এইস্থলে, ∠XOP $=4$ সমকোণ $+\alpha$.

14-চিত্রে $\vec{OX}$ বামাবর্তে O-বিন্দুর চারিপাশে দুইবার সম্পূর্ণ ঘুরিয়া OP অবস্থানে আসিয়া ∠XOP $=8$ সমকোণ $+\alpha$ কোণ সৃষ্টি করিয়াছে। উপরোক্ত চিত্রগুলিতে যদিও সূক্ষ্মকোণ ∠XOP-র মান একই আছে, ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ একই অবস্থান OP-তে আসিয়া তিনটি বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

আবার, মনে কর ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ দক্ষিণাবর্তে ঘুরিয়া OP অবস্থানে

আসিয়াছে। এইস্থলে সূক্ষ্মকোণ $\angle XOP$-র পরিমাপ যদিও একই, অর্থাৎ α, কিন্তু দক্ষিণাবর্ত ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন (চিত্র 15) $\angle XOP$-র পরিমাণ $\alpha - 4$ সমকোণ। এই প্রকারে $\overrightarrow{OX}$ যদি O-র চারিপাশে দুইবার সম্পূর্ণ ঘুরিয়া OP অবস্থানে আসে তবে (চিত্র 16) $\angle XOP = \alpha - 8$ সমকোণ।

চিত্র 15 চিত্র 16

উপরোক্ত আলোচনা হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, দুইটি রেখা $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OP}$-র অবস্থান দেওয়া থাকিলে $\angle XOP$ দ্বারা অসীম সংখ্যক ধন বা ঋণ কোণ সূচিত হইতে পারে, (যদিও জ্যামিতিতে $\angle XOP$-র দ্বারা সূক্ষ্মকোণ $\angle XOP = \alpha$ বা প্রবৃদ্ধকোণ $\angle XOP = 4$ সমকোণ $- \alpha$ সূচিত হইয়া থাকে)। এই সকল অসীম সংখ্যক কোণগুলিকে একটিকে অপরটির **সমপ্রান্ত্য কোণ** (Coterminal angles) বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : যে-কোনও একটি কোণ α-র সহিত অসীম সংখ্যক সমপ্রান্ত্য কোণ হইতে পারে। আবার যে-কানও দুইটি সমপ্রান্ত্য কোণের ব্যবধান চার সমকোণের গুণিতক। অর্থাৎ কোনও কোণ $\angle XOP$-র $(=\alpha)$ সমপ্রান্ত্য অসীম সংখ্যক কোণকে আমরা $\alpha + 4n\pi$ লিখিতে পারি—n-এর মান যে-কোনও ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অথবা ইহাও বলা যায় যে, $\angle XOP$-র $(=\alpha)$ সমপ্রান্ত্য অসীম সংখ্যক কোণ $\alpha \pm 4n\pi$, —n-এর মান ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

1.4. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন একক :

সময়, দৈর্ঘ্য, ভর, তাপ ইত্যাদি মাপিবার জন্য যেমন বিভিন্ন পদ্ধতি আছে তেমনি কোণ মাপিবারও বিভিন্ন পদ্ধতি বর্তমান। যে কোনও কিছু মাপিবার জন্য যেমন এককের প্রয়োজন, সেই প্রকার কোণকে মাপিবারও বিভিন্ন একক প্রচলিত আছে।

কোণ মাপিবার পদ্ধতিকে দুইভাগে ভাগ করা যায়—**আয়ত** (Rectangular) ও **বৃত্তীয়** (Circular)। এক সমকোণকে ভাগ করিয়া যে একক ধরা হয়, তাহা আয়তমানের একক এবং রেডিয়ানকে একক ধরিয়া বৃত্তীয় পদ্ধতির একক নেওয়া হয়।

আয়ত পদ্ধতি (Rectangular System) : আয়ত পদ্ধতি দুই প্রকার :— ষষ্টিক পদ্ধতি (Sexagesimal System) ও (ii) **শতক পদ্ধতি** (Centesimal System).

(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি**—এই পদ্ধতিতে এক সমকোণের 90 সমভাগের প্রতিটি ভাগকে 1 ডিগ্রী (1 degree) বা 1° বলা হয়। আবার 1 ডিগ্রীকে সমান 60 অংশে বিভক্ত করিলে প্রতিটি অংশকে 1 মিনিট (1 minute) বা $1'$ বলে। মিনিটকে আবার সমান 60 অংশে বিভক্ত করিলে, প্রতি অংশকে 1 সেকেণ্ড (1 second) বা $1''$ বলে। অর্থাৎ ষষ্টিক পদ্ধতিতে,

1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী (90°).
1 ডিগ্রী = 60 মিনিট ($60'$).
1 মিনিট = 60 সেকেণ্ড ($60''$).

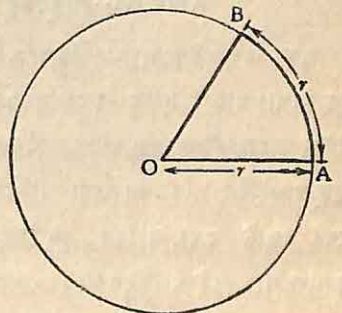
(ii) **শতক পদ্ধতি**—এই পদ্ধতিতে 1 সমকোণের 100 সমভাগের প্রতিটি ভাগকে 1 গ্রেড (1 grade) বা 1^g বলা হয়। আবার 1 গ্রেডকে সমান 100 অংশে বিভক্ত করিলে প্রতিটি অংশকে 1 মিনিট (1 minute) বা 1` বলে। মিনিটকে আবার সমান 100 অংশে বিভক্ত করিলে, প্রতিটি অংশকে সেকেণ্ড (1 second) বা 1`` বলে। অর্থাৎ শতক পদ্ধতিতে

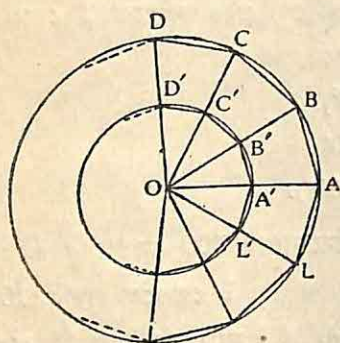
1 সমকোণ = 100 গ্রেড (100^g).
1 গ্রেড = 100 মিনিট (100`).
1 মিনিট = 100 সেকেণ্ড (100``).

বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System): এই পদ্ধতিতে কোণের একক 1 রেডিয়ান (1 Radian) বা 1^c বলা হয়।

সংজ্ঞা — রেডিয়ান : যে-কোন বৃত্তে ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক **রেডিয়ান** বলে।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, $\overline{OA} = r$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ। **বৃত্তচাপ** AB-র দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধ r-এর সমান। এক্ষণে চাপ AB কেন্দ্র O বিন্দুতে $\angle AOB$ উৎপন্ন করিয়াছে। সংজ্ঞানুসারে, $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান।

চিত্র 17

রেডিয়ানকে একক হিসাবে ধরিতে হইলে আমাদের প্রমাণ করা দরকার যে, ইহা একটি ধ্রুবক কোণ (constant angle)। অর্থাৎ বিভিন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধের তারতম্যের জন্য এই এককের কোন পরিবর্তন হয় না। ইহা প্রমাণ করিবার জন্য আমরা পরবর্তী উপপাদ্যটির সাহায্য লইব।

1.5. উপপাদ্য : যে-কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক। পার্শ্ববর্তী চিত্রটি দুইটি বিভিন্ন ব্যাসার্ধের এককেন্দ্রীয় বৃত্ত যাহাদের কেন্দ্র O.

চিত্র 18

মনে কর, বৃহত্তর ব্যাসার্ধসম্পন্ন বৃত্তটির মধ্যে একটি n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ ABCD··· অন্তর্লিখিত করা হইল। এখন, OA, OB, OC, OD···যোগ করিলে, উহারা অন্তঃস্থ বৃত্তকে যথাক্রমে A′, B′, C′, D′···বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার A′B′, B′C′, C′D′··· যোগ করিলে অন্তঃস্থ বৃত্তটিতেও n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ A′B′C′D′···অন্তর্লিখিত হইবে।

এখন, $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, এবং $\overline{OA'} \cong \overline{OB'}$. আবার, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$-এর মধ্যে $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$ এবং $\angle O$ সাধারণ। অতএব, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। সুতরাং $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{OA} : \overline{OA'}$. আবার যেহেতু ABCD···একটি সুষম বহুভুজ, ইহার পরিসীমা $= n.AB$. অনুরূপে A′B′C′D′···সুষম বহুভুজটির পরিসীমা $= n.A'B'$.

$$\text{অতএব,}\quad \frac{\text{ABCD······বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{A′B′C′D′···বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{n.\overline{AB}}{n.\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

লক্ষ্য কর, উপরোক্ত সমানুপাত n-এর উপর নির্ভরশীল নহে। অর্থাৎ বহুভুজের বাহু সংখ্যা যাহাই হউক না কেন, এই সমানুপাত একই থাকিবে। এখন মনে করা যাউক বাহুগুলির সংখ্যা বাড়ান হইতেছে, এই সংখ্যা যদি যথেষ্ট বাড়ান যায় তবে বহুভুজ দুইটির পরিসীমা এবং সংশ্লিষ্ট বৃত্তগুলির পরিধির মধ্যে যে পার্থক্য তাহাকে যথেষ্ট ছোট করা যাইবে ; কাজেই চরম অবস্থায় (in the limit) ইহাদের মধ্যে কোনও পার্থক্যই থাকিবে না। অতএব এই অবস্থায়

$$\frac{\text{ABCD······বৃত্তের পরিধি}}{\text{A′B′C′D′···বৃত্তের পরিধি}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}},$$

কিন্তু, $\overline{OA}$ এবং $\overline{OA'}$ যথাক্রমে ABCD···ও A′B′C′D′···বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\text{ABCD···বৃত্তের পরিধি}}{\text{ABCD···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{A′B′C′D′···বৃত্তের পরিধি}}{\text{A′B′C′D′···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{যে-কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাসার্ধ}}$ = সর্বদাই একই থাকিবে।

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{যে-কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাসার্ধ}}$ = ধ্রুবক।

আবার, ব্যাস $= 2 \times$ ব্যাসার্ধ

$\therefore$ $\dfrac{\text{কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{ব্যাস}}$ = ধ্রুবক।

এই ধ্রুবকটিকে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{উহার ব্যাস}} = \pi$

মনে কর, বৃত্তের ব্যাস $= d$ এবং উহার ব্যাসার্ধ $= r$

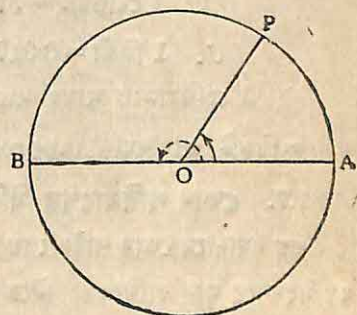
$\therefore$ **বৃত্তের পরিধি** $= \pi . d = 2\pi r$.

ধ্রুবক π (পাই) একটি অমেয় (incommensurable) সংখ্যা। ইহাকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না। ইহার আসন্নমান নির্ধারণের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার আসন্ন মান 3·14159. সাধারণতঃ ভগ্নাংশে π-এর মান $\frac{22}{7}$ ধরা হয়। $\frac{355}{113}$, π-এর আরও শুদ্ধতর মান।

এখন আমরা প্রমাণ করিব যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

1.6. উপপাদ্য : রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

মনে কর, $\overline{OA}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O। ইহার $\overset{\frown}{AP}$ ব্যাসার্ধ $\overline{OA}$-র সমান। সংজ্ঞানুসারে, $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান। মনে কর, $\overline{AO}$-র বর্ধিতাংশ বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং $\overline{AB}$ বৃত্তটির ব্যাস।

চিত্র 19

এখন APB বৃত্তচাপটি পরিধির অর্ধেক এবং ইহা কেন্দ্রে 2 সমকোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

জ্যামিতি হইতে আমরা জানি, $\dfrac{\angle AOP}{\overparen{AP}} = \dfrac{\angle AOB}{\overparen{AB}}$

অর্থাৎ, $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{\text{চাপ } AP} = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\text{চাপ } AB}$

অর্থাৎ, $1 \text{ রেডিয়ান} = 2 \text{ সমকোণ} \times \dfrac{\overparen{AP}}{\overparen{AB}}.$

$$= 2 \text{ সমকোণ} \times \frac{\text{ব্যাসার্ধ } \overline{OA}}{\overparen{AB}} \quad [\because \overparen{AP} = \text{ব্যাসার্ধ } \overline{OA}]$$

$$= 2 \text{ সমকোণ} \times \frac{r}{\pi r}$$

[$\overline{OA} = r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ) এবং $\overparen{AB} = \frac{1}{2} \times \text{পরিধি} = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$]

$$= \frac{2}{\pi} \textbf{ সমকোণ} = \textbf{একটি ধ্রুবক,}$$

—যেহেতু π একটি ধ্রুবক এবং সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ।

অতএব, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : আমরা দেখিয়াছি যে, $1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ। লক্ষ্য কর, ইহা বৃত্তের ব্যাসার্ধের উপর নির্ভরশীল নহে। অতএব যে-কোন বৃত্তের জন্যই ইহার মান একই থাকিবে। আবার, যেহেতু $1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ,

অতএব, $\boldsymbol{\pi}$ **রেডিয়ান = 2 সমকোণ = 180°**

$$\therefore \; 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180°}{\pi} \simeq \frac{180°}{3{\cdot}14159} \simeq 57{\cdot}29577 \text{ ডিগ্রী।}$$

$$\therefore \; 1 \text{ রেডিয়ান} \simeq 57°17'44{\cdot}8''$$

$$\therefore \; 1 \text{ ডিগ্রী} \simeq 0{\cdot}0174533 \text{ রেডিয়ান।}$$

1 রেডিয়ানকে আমরা সংক্ষেপে 1^c লিখিয়া থাকি।

$\simeq$ চিহ্নটি 'প্রায় সমান' (approximately equal) বুঝাইতে ব্যবহৃত হইয়াছে।

1.7. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ :

প্রশ্ন সমাধানে কোণ পরিমাপের তিনটি বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধগুলি যত্ন সহকারে মনে রাখিবে। নিম্নে ইহারা প্রদত্ত হইল।

$$\textbf{1 সমকোণ} = \mathbf{90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2}}$$

উদাহরণ ঃ কোন কোণের পরিমাণ ষষ্টিক, শতক ও রেডিয়ান পদ্ধতিতে যথাক্রমে D°, G^g ও C^c হইলে প্রমাণ কর যে, উহাদের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ নিম্নরূপ হইবে ঃ

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{C}{\pi}$$

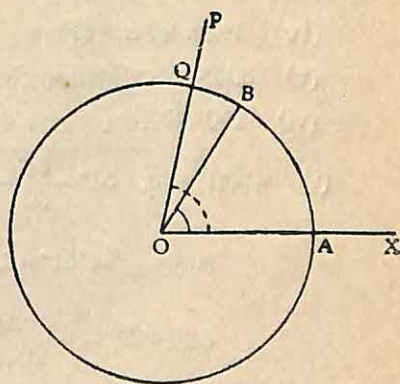
মনে কর, কোণ $\angle XOP$-র পরিমাণ ষষ্টিক, শতক ও রেডিয়ান পদ্ধতিতে যথাক্রমে D°, G^g ও C^c. তাহা হইলে,

$$D^\circ=\frac{D}{90} \text{ সমকোণ}, \ G^g=\frac{G}{100} \text{ সমকোণ}, \ C^c=\frac{2C}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

যেহেতু, ইহারা পরস্পর সমান,

অতএব, $\frac{D}{90}=\frac{G}{100}=\frac{2C}{\pi}$ অর্থাৎ, $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{C}{\pi}$.

1.8. উপপাদ্য ঃ কোন বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার বৃত্তীয়মান ঐ চাপের দৈর্ঘ্য এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান।

মনে কর, XOP যে-কোন একটি কোণ। O-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, যেন, উহা OP-কে Q এবং OX-কে A বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, AQ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\angle AOQ$ উৎপন্ন করে। মনে কর, AB বৃত্তচাপ OA ব্যাসার্ধের সমান। অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\angle AOB=1$ রেডিয়ান।

চিত্র 20

এখন জ্যামিতি হইতে আমরা জানি যে, কোন বৃত্তের বিভিন্ন চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের অনুপাত চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান। অতএব,

$$\frac{\angle XOP}{\angle AOB}=\frac{\text{চাপ } AQ}{\text{চাপ } AB}=\frac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } \overline{OA}}$$

অর্থাৎ, $\frac{\angle XOP}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \frac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } \overline{OA}}$

অর্থাৎ, $\angle XOP = \frac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } \overline{OA}}$ রেডিয়ান।

এখন মনে কর, $\angle XOP = \theta^c$, চাপ AQ-এর দৈর্ঘ্য $= l$, এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$, তাহা হইলে,

$$\theta = \frac{l}{r} \text{ রেডিয়ান} \quad \text{অথবা,} \quad l = r\theta.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ কোণের পরিমাপের এককের উল্লেখ না থাকিলে, উহাকে সর্বদা রেডিয়ান ধরিতে হইবে। যেমন, কোনও কোণের পরিমাপ θ বলা হইলে আমরা উহাকে θ রেডিয়ান ধরিব।

উদাহরণ 1. প্রকাশ কর :—

(i) $63°14'51''$-কে শতক পদ্ধতিতে।

(ii) $94^g23'87''$-কে ষষ্টিক পদ্ধতিতে।

(iii) $\frac{7\pi^c}{6}$-কে শতক পদ্ধতিতে।

(iv) 1^c-কে ষষ্টিক পদ্ধতিতে।

(v) $395°$-কে রেডিয়ান পদ্ধতিতে।

(vi) $110^g30'$-কে রেডিয়ান পদ্ধতিতে।

(i) আমরা জানি, $51'' = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}$ মিঃ

আবার, $14'51'' = 14\frac{17}{20}$ মিঃ $= \frac{297}{20} = \frac{297}{20 \times 60}$ ডিগ্রী

$\therefore \quad 63°14'51'' = 63\frac{297}{20 \times 60} = \frac{75897}{1200}$ ডিগ্রী।

এখন, $90° = 100^g \quad \therefore \; 1° = \frac{10^g}{9}$

$\therefore \quad \frac{75897}{1200} = \frac{75897}{1200} \times \frac{10}{9} = \frac{2811}{40} = 70\frac{11}{40} = 70^g27'50''$

(ii) $94^g23'87'' = 94^g23\frac{87'}{100}94\frac{2387^g}{1000}$

এখন, $100^g = 90^\circ \quad \therefore \quad \frac{942387}{100,00} = \frac{942387}{100,00} \times \frac{9^\circ}{10}$

$= 84{\cdot}81483^\circ = 84^\circ 48' 53{\cdot}388''$

(iii) আমরা জানি, $\frac{\pi^c}{2} = 100^g \quad \therefore \quad 1^c = \frac{100 \times 2^g}{\pi}$

$\therefore \quad \frac{7\pi^c}{6} = \frac{100 \times 2 \times 7\pi}{6 \times \pi} = \frac{700^g}{3} = 233^g 33' 33{\cdot}\dot{3}''$

(iv) $\because \quad \frac{\pi^c}{2} = 90^\circ \quad \therefore \quad 1^c = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180}{3{\cdot}141} = 57^\circ 17' 44{\cdot}8''$

(v) $\because \quad 90^\circ = \frac{\pi^c}{2} \quad \therefore \quad 395^\circ = \frac{\pi}{180} \times 395 = \frac{79}{36}\pi^c.$

(iv) $\because \quad 100^g = \frac{\pi^c}{2}$ এবং $110^g 30' = 110{\cdot}3^g$

$\therefore \quad 111^g 30' = \frac{\pi \times 110{\cdot}3}{200} = \frac{1103\pi^c}{2000}$.

উদাহরণ 2. ষষ্টিক পদ্ধতিতে যে কোণের পরিমাপ x মি. শতক পদ্ধতিতে সেই কোণের মান y মি. হইলে দেখাও যে, $50x = 27y$.

$\because \quad x$ মি. $= \frac{x^\circ}{60} = \frac{x}{60} \times \frac{10^g}{9} = \frac{10x^g}{540} = \frac{10x \times 100}{540}$ মি. (শতক)

$\therefore \quad y = \frac{100 \times 10x}{540} = \frac{50x}{27} \qquad \therefore \quad 27y = 50x.$

উদাহরণ 3. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের প্রথমটি $\frac{2}{3}x^g$, দ্বিতীয়টি $\frac{3}{2}x^\circ$ এবং তৃতীয়টি $\frac{\pi x^c}{75}$ হইলে, কোণত্রয়ের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

যেহেতু, $\frac{2}{3}x^g = \frac{2x}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{5}x^\circ$

এবং $\frac{\pi x^c}{75} = \frac{\pi x}{75} \times \frac{180}{\pi} = \frac{36x}{15} = \frac{12x^\circ}{5}$

এখন, $\frac{3}{5}x + \frac{12x}{5} + \frac{3}{2}x = 180^\circ$

বা, $\frac{6x + 24x + 15x}{10} = 180^\circ$

বা, $45x = 1800 \quad \therefore \quad x = \frac{1800}{45} = 40^\circ \quad \therefore \quad$ 1মটি $= \frac{3}{5} \times 40^\circ = 24^\circ$

2য়টি $= \frac{12}{5} \times 40^\circ = 96^\circ$ এবং 3য়টি $= \frac{3}{2} \times 40^\circ = 60^\circ$.

উদাহরণ 4. বৃত্তীয় মান, ষষ্টিক ও শতক পদ্ধতিতে কোন সুষম দশভুজের একটি অন্তঃকোণের মান কত হইবে ?

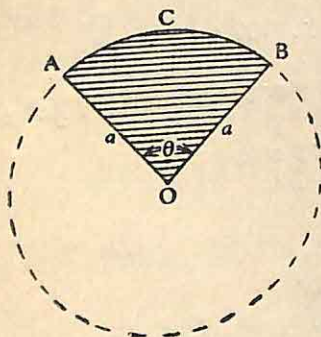
আমরা জানি, কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি উহার বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ অপেক্ষা 4 সমকোণ কম। অর্থাৎ বাহুসংখ্যা n হইলে, অন্তঃকোণসমষ্টি $(2n-4)$ সমকোণ।

$\therefore$ একটি অন্তঃকোণ $=\dfrac{2n-4}{n}$ সমকোণ,

এখানে, বাহুসংখ্যা $n=10$, $\therefore$ একটি কোণ $=\dfrac{2.10-4}{n}=\frac{16}{10}$ সমকোণ

এখন, $\frac{16}{10}$ সমকোণ $=\dfrac{16\times 90^\circ}{10}=144^\circ$

$$=\tfrac{16}{10}\times 100=160^g=\frac{16}{10}\times\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi^c}{5}.$$

উদাহরণ 5. কোন বৃত্তকলার পরিসীমা কোন অর্ধবৃত্তের চাপের সমান ; যদি উহাদের ব্যাসার্ধ সমান হয়, তবে বৃত্তকলার কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে বাহির কর।

চিত্র 21

মনে কর, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং $\angle AOB=\theta$ রেডিয়ান।

এখানে বৃত্তকলার পরিসীমা =

চাপ $ACB+AO+BO$

$=$ চাপ $ACB+2a$

$=a\theta+2a=a(\theta+2)$

$$\left[\because\ \theta^c=\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}\right]$$

আবার, অর্ধবৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্য

$=\dfrac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2}=\dfrac{2\pi a}{2}=\pi a \quad \therefore\ a(\theta+2)=\pi a.$

$\therefore\ \theta=\pi-2=3{\cdot}1416-2=1{\cdot}1416$ রেডিয়ান।

$$=\frac{1{\cdot}1416\times 180}{\pi}=\frac{1{\cdot}1416\times 180}{3{\cdot}1416}=65^\circ 24' 30{\cdot}4''.$$

উদাহরণ 6. সূর্য হইতে পৃথিবীর দূরত্ব 92,500,000 মাইল। যদি পৃথিবীর উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে সূর্যের ব্যাস 32′ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তবে, সূর্যের ব্যাস কত মাইল ?

মনে কর, সূর্যের ব্যাস D মাইল। এখন, যেহেতু সূর্যের (S) ব্যাস খুব ছোট কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, সেইহেতু পৃথিবীর (E) উপরিস্থিত বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ধরিয়া কোন বৃত্ত অংকন করিলে, সূর্যের ব্যাস সেই বৃত্তের চাপ হইবে।

অর্থাৎ এখানে, $32' = \frac{32^\circ}{60} = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{676}$ রেডিয়ান।

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{675} = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{সূর্যের ব্যাস}}{\text{পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব}} = \frac{D}{92,500,000}$$

$$\therefore \quad D = \frac{2 \times \pi \times 92,500,000}{675} = \frac{185,000,000}{675} \times \frac{22}{7} = 862,000 \text{ মাইল (প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা 1

$[\ \pi = \frac{22}{7}\ ]$

1. শতক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :
   30°, 75°, 60°30′, 69°13′30″, 50°37′5·7″, 142°15′45″.
   43°52′38·1″, 12′9″, 235°12′36″, 475°13′48″.
   $\frac{\pi^c}{4}, \frac{3\pi^c}{4}, 10\pi^c, \frac{7\pi^c}{5}, \frac{4\pi^c}{5}, \frac{2\pi^c}{3}, 3\pi^c.$

2. ষষ্টিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :
   100^g, 75^g, $45^g35'24''$, $40^g1'25{\cdot}4''$, $56^g87'50''$, $1^g2'3''$, $99^g99'99''$.
   $\frac{\pi^c}{6}, \frac{5\pi^c}{12}, \frac{3\pi^c}{4}, \pi^c, \frac{8\pi^c}{9}, n\pi^c.$

3. রেডিয়ান পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :
   15°, 60°, 175°45′, 47°25′36″, 400°, 30^g, 75^g, $110^g30'$, $345^g25'36''$, $50^g50'50''$.

4. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর একটি সূক্ষ্মকোণের দ্বিগুণ হইলে, কোণত্রয়কে রেডিয়ান পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

5. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ রেডিয়ান, তৃতীয় কোণটি কত ডিগ্রী ?

6. একটি অন্তঃকোণের মান ষষ্টিক, শতক ও রেডিয়ান পদ্ধতিতে বাহির কর :
(a) সুষম চতুর্ভুজ (b) সুষম পঞ্চভুজ (c) সুষম অষ্টভুজ (d) সুষম দ্বাদশভুজ
(e) 20টি বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ।

7. কোন ঘড়িতে, (a) 4-30 মিঃ (b) 5-40 মিঃ (c) 2-30 মিঃ সময় হইলে, উভয় কাঁটার মধ্যে যে কোণ হইবে, তাহা ষষ্টিক, শতক ও রেডিয়ান পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

8. দুইটি সুষম বহুভুজের বাহুগুলির অনুপাত, 3 : 4 এবং ডিগ্রীতে প্রথমটির অন্তঃকোণের পরিমাপ ও গ্রেডে দ্বিতীয়টির অন্তঃকোণের পরিমাপের অনুপাত 4 : 5. বহুভুজ দুইটির বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

9. সমান সমান চাপ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে যথাক্রমে 60° ও 75° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। বৃত্তদুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত কত ?

10. একজন লোক একটি বৃত্তাকার পথে প্রতি ঘণ্টায় 10 মাইল চলিয়া 36 সেকেণ্ডে যে চাপ অতিক্রম করিল, সে চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করিল ; প্রমাণ কর সেই বৃত্তের ব্যাস 360 গজ। [W. B. S. E. S. F. 1958]

11. দুইটি কোণের সমষ্টি $\frac{11}{7}$ রেডিয়ান, এবং উহাদের অন্তর 40°. ক্ষুদ্রতর কোণের মান ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। [W. B. S. E. S. F. 1960]

12. 25 ফুট ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তের কেন্দ্রে 15 ফুট দৈর্ঘ্যের চাপ যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা রেডিয়ান ও ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

13. ব্যাসার্ধের 0·357 গুণ দৈর্ঘ্যের চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করিবে ?

14. পৃথিবীর ব্যাস 8000 মাইল হইলে, উহার পরিধি কত মাইল ?

15. কোন বৃত্তাকার পথে দৌড়াইতে গিয়া এক ব্যক্তি প্রতি মিনিটে যে চাপ অতিক্রম করে তাহা বৃত্তের কেন্দ্রে 18° কোণ উৎপন্ন করে, যদি বৃত্তের পরিধি 1000 মিটার হয়, তবে একবার ঘুরিয়া আসিতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

16. দুইটি সুষম বহুভুজের প্রথমটির একটি অন্তঃকোণের পরিমাপ ডিগ্রীতে যত দ্বিতীয়টির সেই পরিমাপ গ্রেডে তত। বহুভুজ দুইটির বাহুর অনুপাত 3 : 2 হইলে, উহাদের বাহুসংখ্যা কত ?

17. একটি বড় দেওয়াল ঘড়ির দুইটি মিনিট ঘরের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য $1\frac{4}{7}$ সে. মি. হইলে, ঘড়ির মিনিট কাঁটার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

18. যদি a এবং b কোন কোণের ষষ্টিক ও শতক সেকেণ্ড-এর মান হয়, তবে প্রমাণ কর, $250a = 81b$.

19. 6 ফুট উচ্চতাসম্পন্ন কোন ব্যক্তি 1 মাইল দূরবর্তী কোন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ষষ্টিক ও শতক পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

20. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 3960 মাইল, এবং পৃথিবী হইতে চন্দ্রের দূরত্ব উহার 60 গুণ। চন্দ্রের ব্যাস পৃথিবীর উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে $16'$ কোণ উৎপন্ন করিলে, উহার ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

21. পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ 92,700,000 মাইল এবং উহা 'সিরিয়াস' নামক কোন নক্ষত্রে $0{\cdot}4''$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিলে, পৃথিবী হইতে ঐ নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

22. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ $3x$ ডিগ্রী, দ্বিতীয়টি x গ্রেড্ এবং তৃতীয়টি $\frac{\pi x}{300}$ রেডিয়ান হইলে, কোণগুলি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

23. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ ডিগ্রীতে যত, অপর কোণ গ্রেডে তত। আবার তৃতীয় কোণ যত শতক-সেকেণ্ড তাহা প্রথম ও দ্বিতীয় কোণের ষষ্টিক-সেকেণ্ডের যোগফলের সমান, ত্রিভুজের কোণগুলির বৃত্তীয় মান বাহির কর।

24. দুইটি সুষম বহুভুজের বাহুসংখ্যার অনুপাত $m : n$. ডিগ্রীতে প্রথমটির একটি কোণ এবং গ্রেডে অপরটির একটি কোণের অনুপাত $p : q$. বহুভুজ দুইটির বাহুসংখ্যা কত ?

25. কোন কোণের পরিমাণ $G^g m'$ হইতে $D^\circ M'$ বেশী। প্রমাণ কর, এই কোণ এবং এক সমকোণের অনুপাত $\frac{1}{90}\left(D+\frac{M}{60}\right)+\frac{1}{100}\left(G+\frac{m}{100}\right)$.

26. ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যে (*i*) 60^g (*ii*) 155° কোণ করিলে 7 টা এবং 8 টার মধ্যে ঘড়িতে কয়টা বাজিবে ?

27. r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোন বৃত্তের কেন্দ্রে l দৈর্ঘ্যের কোন চাপ যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে কোণের একক ধরিলে, এবং D°, G^g এবং C রেডিয়ানকে সেই এককে প্রকাশ করিলে, যদি উহারা যথাক্রমে x, y, z হয় তবে প্রমাণ কর,

$$x : y : z = \frac{D\pi}{18} : \frac{G\pi}{20} : 10C.$$

28. কোন বৃত্তের কেন্দ্রে যে চাপ 60° কোণ উৎপন্ন করে অপর কোন বৃত্তে সেই চাপ 50^g কোণ উৎপন্ন করে। প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করিবে তাহার বৃত্তীয় মান বাহির কর।

29. কোন গাড়ীর চাকার ব্যাস 4 ফুট ; চাকাটি প্রতি সেকেণ্ডে 6 বার ঘুরিলে, গাড়ীর গতিবেগ কত ?

30. যে চাপ কোন বৃত্তের কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দ্বিগুণ চাপ, উহার তিনগুণ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট অপর কোন বৃত্তের কেন্দ্রে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করিবে ?

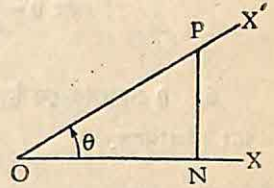
দ্বিতীয় অধ্যায়

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণানুপাত

2.1. সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণানুপাতের সংজ্ঞা :

এই অধ্যায়ে আমরা কেবলমাত্র সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণানুপাত আলোচনা করিব। যদিও এই ত্রিকোণানুপাতগুলি যে কোন পরিমাণের কোণের জন্য প্রযোজ্য, আমরা এই পুস্তকে কেবলমাত্র সূক্ষ্মকোণের জন্যই আমাদের আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখিব।

চিত্র 23

মনে কর, কোন্ ঘূর্ণায়মান রেখা $\overrightarrow{OX}$ বামাবর্তে ঘুরিয়া $\overrightarrow{OX'}$ অন্তিম অবস্থানে আসিল। $\overrightarrow{OX'}$ রেখার উপরে যে কোন বিন্দু P লও এবং P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপরে $\overline{PN}$ লম্ব টান। মনে কর, $\angle XOP = \theta$. তাহা হইলে ΔNOP একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইল। এই ত্রিভুজে $\overline{ON}$-কে ভূমি বা সন্নিহিত বাহু, $\overline{PN}$-কে লম্ব বা বিপরীত বাহু এবং $\overline{OP}$-কে অতিভুজ বলা হয়। এক্ষণে, θ কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

1. θ কোণের সাইনকে sine of θ বা সংক্ষেপে $\sin\theta$ (সাইন থিটা) লিখিলে,

$$\sin\theta = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}} \quad \left(\text{অর্থাৎ, } \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \right)$$

2. θ কোণের কোসাইনকে cosine of θ বা সংক্ষেপে $\cos\theta$ (কস থিটা) লিখিলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} \quad \left(\text{অর্থাৎ, } \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \right)$$

3. θ কোণের ট্যান্‌জেণ্টকে tangent of θ বা সংক্ষেপে $\tan\theta$ (ট্যান্ থিটা) লিখিলে,

$$\tan\theta = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} \quad \left(\text{অর্থাৎ, } \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} \right)$$

4. θ কোণের কোসেক্যাণ্টকে cosecant of θ বা সংক্ষেপে cosec θ (কোসেক থিটা) লিখিলে,

$$\textbf{cosec}\,\theta = \frac{\textbf{OP}}{\textbf{PN}} \quad \left(\text{অর্থাৎ,} \quad \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} \right)$$

5. θ কোণের সেক্যাণ্টকে secant of θ বা সংক্ষেপে sec θ (সেক থিটা) লিখিলে,

$$\textbf{sec}\,\theta = \frac{\textbf{OP}}{\textbf{ON}} \quad \left(\text{অর্থাৎ,} \quad \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} \right)$$

6. θ কোণের কোট্যানজেণ্টকে cotangent of θ বা সংক্ষেপে cot θ (কট থিটা) লিখিলে,

$$\textbf{cot}\,\theta = \frac{\textbf{ON}}{\textbf{PN}} \quad \left(\text{অর্থাৎ,} \quad \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} \right)$$

ইহা ছাড়া আরও দুইটি ত্রিকোণানুপাত আছে যাহা সচরাচর ব্যবহৃত হয় না। ইহাদের সংজ্ঞাও নিম্নে দেওয়া হইল।

θ কোণের ভার্সড্ সাইনকে versed sine of θ বা সংক্ষেপে vers θ (ভার্স থিটা) লিখিলে,

$$\textbf{vers}\,\theta = 1 - \textbf{cos}\,\theta.$$

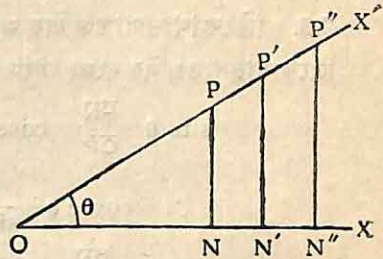
θ কোণের কোভার্সড্ সাইনকে coversed sine of θ বা সংক্ষেপে covers θ (কোভার্স থিটা) লিখিলে,

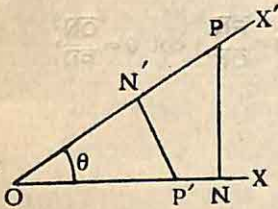
$$\textbf{covers}\,\theta = 1 - \textbf{sin}\,\theta.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ 1. লক্ষ্য কর, ত্রিকোণানুপাতগুলি দুইটি দৈর্ঘ্যের অনুপাত, সুতরাং ইহারা প্রত্যেকটি এক একটি সংখ্যা মাত্র। অর্থাৎ উহাদের কোন একক নাই।

2. সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণানুপাতগুলি সব কয়টি-ই ধনাত্মক হইবে। চিত্র 23-এ Δ PON-এর বাহু সকল $\overline{\text{PN}}$, $\overline{\text{ON}}$ এবং $\overline{\text{OP}}$ প্রত্যেকটিই ধনাত্মক বলিয়া ইহাদের অনুপাতগুলিও ধনাত্মক।

2.2. উপপাদ্য : নির্দিষ্ট কোন কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

মনে কর, কোন ঘূর্ণায়মান রেখা $\vec{OX}$ বামাবর্তে ঘুরিয়া $\vec{OX'}$ অন্তিম অবস্থানে আসিয়াছে এবং $\angle XOX' = \theta$. $\vec{OX'}$-এর উপর যে কোনও তিনটি বিন্দু P, P′, P″ লও ও $\vec{OX}$-এর উপরে $\overline{PN}$, $\overline{P'N'}$ $\overline{P''N''}$, লম্ব টান। তাহা হইলে ত্রিভুজত্রয় PON, P′ON′, P″ON″ প্রত্যেকটিই সমকোণী ও একে অপরের সদৃশ। অতএব, $\frac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'N'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{P''N''}}{\overline{OP''}} = \sin\theta$. অর্থাৎ, উপরোক্ত যে কোনও ত্রিভুজ-ই লওয়া হউক না কেন, sin θ-র মান সর্বদা একই থাকে।

চিত্র 24

অনুরূপভাবে সহজেই দেখা যাইবে যে, অন্যান্য ত্রিকোণানুপাতগুলিও একটি নির্দিষ্ট কোণের জন্য অপরিবর্তিত থাকে।

চিত্র 25

আবার মনে কর, ∠XOX′ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ (অর্থাৎ $\vec{OX}$ ঘূর্ণায়মান রেখাটি বামাবর্তে ঘুরিয়া ∠XOX′ উৎপন্ন করিয়াছে)। $\vec{OX'}$-এর উপর P বিন্দুর পরিবর্তে $\vec{OX}$-এর উপর P′ বিন্দু লও ও $\vec{OX'}$-এর উপরে $\overline{P'N'}$ লম্ব টান। এইক্ষেত্রে,

$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\overline{P'N'}}{\overline{OP'}}$, $\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\overline{ON'}}{\overline{OP}}$ ইত্যাদি

আবার PON ও P′ON′ এই দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ (যেহেতু, $\angle PNO \cong P'N'O = 1$ সমকোণ ও ∠θ সাধারণ)। অতএব,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{P'N'}}{\overline{OP'}} &= \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \sin\theta, \\ \text{এবং } \frac{\overline{ON'}}{\overline{OP'}} &= \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \cos\theta, \end{aligned}\right\} \quad (\Delta PON \text{ হইতে})$$

অর্থাৎ, PON বা N'OP' ত্রিভুজদ্বয়ের প্রতিটি ক্ষেত্রেই sin θ বা cos θ-র মান অপরিবর্তিত থাকে। অনুরূপভাবে, অন্যান্য ত্রিকোণানুপাতগুলিও নির্দিষ্ট কোণ θ-র জন্য নির্দিষ্ট সংখ্যা হইবে।

2.3. ত্রিকোণানুপাতগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ :

ত্রিকোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা হইতে আমরা দেখিয়াছি (চিত্র 23 দেখ) :

$$\sin\theta=\frac{\overline{PN}}{\overline{OP}},\quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{PN}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}},\quad \sec\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{sec}\,\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{\overline{PN}}{\overline{ON}},\quad \cot\theta=\frac{\overline{ON}}{\overline{PN}}$$

$$\therefore\quad \mathbf{cot}\,\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

আবার, $\because\ \sin\theta=\frac{\overline{PN}}{\overline{OP}},\ \cos\theta=\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}},\ \tan\theta=\frac{\overline{PN}}{\overline{ON}},\ \cot\theta=\frac{\overline{ON}}{\overline{PN}},$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

এবং $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

আবার, PON সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle ONP=1$ সমকোণ ও $\overline{OP}$ অতিভুজ।

$$\therefore\quad \overline{PN}^2+\overline{ON}^2=\overline{OP}^2 \quad \cdots \quad (1)$$

উভয়পক্ষকে $\overline{OP}^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\left(\frac{\overline{PN}}{\overline{OP}}\right)^2+\left(\frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad (\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

সাধারণতঃ $(\sin\theta)^2$-কে $\sin^2\theta$, $(\cos\theta)^2$-কে $\cos^2\theta$ লেখা হয়। (অন্যান্য ত্রিকোণানুপাতগুলিকে এইভাবে লেখা হইয়া থাকে।)

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

আবার (1)-এর উভয়পক্ষকে $\overline{ON}^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\left(\frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{ON}}\right)^2$$

অর্থাৎ, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

বা, $\mathbf{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$

অনুরূপভাবে (1)-এর উভয়পক্ষকে $\overline{PN}^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$1 + \left(\frac{\overline{ON}}{\overline{PN}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{PN}}\right)^2$$

অর্থাৎ, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

বা, $\mathbf{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta}$

উপরোক্ত সূত্রগুলিকে নিম্নরূপেও লেখা হইয়া থাকে।

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$;
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$;
$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$, ইত্যাদি।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : মনে রাখিবে— $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ইত্যাদি প্রত্যেকটি, এক একটি সংখ্যা। $\sin\ \theta$ বলিতে $\sin \times \theta$ বুঝায় না, বা $\cos\theta$ বলিতে $\cos \times \theta$ বুঝায় না। আবার, $\sin\ \theta \times \sin\ \theta = (\sin\ \theta)^2 = \sin^2\theta$; $\cos^2\theta \times \cos\theta = \cos^3\theta$. অতএব, $\sin^3\theta$ ও $\sin\ 3\theta$ ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা। কেননা, $\sin^3\theta = (\sin\theta)^3$ এবং $\sin 3\theta = \sin(3\theta)$.

2.4. $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মানের সীমা :

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. অর্থাৎ দুইটি সংখ্যার বর্গের যোগফল 1. আবার ইহারা বর্গ বলিয়া প্রত্যেকটিই ধনাত্মক। অতএব ইহা সহজেই বুঝা যায় যে, $\sin^2\theta$ বা $\cos^2\theta$-র মান 1 অপেক্ষা বেশী হইতে পারে না। মনে কর $\sin^2\theta$-র মান যদি 1 অপেক্ষা বেশী হয়, তাহা হইলে $\cos^2\theta$-র মান (একটি বর্গ রাশি) ঋণাত্মক হইবে ; ইহা অসম্ভব। অতএব $\sin^2\theta$ বা $\cos^2\theta$-র মান 1 অপেক্ষা বেশী হইতে পারে না। সুতরাং $\sin\theta$ বা $\cos\theta$-র মান সর্বদা -1 ও $+1$-এর মধ্যে থাকিবে।

আবার $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\sin\theta = 1/\operatorname{cosec}\theta$; অতএব, $\sec\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$-র মান কখনও -1 ও $+1$-এর মধ্যে থাকিতে পারে না। ইহাদের ধনাত্মক মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড় হইবে।

$\tan\theta$ বা $\cot\theta$, 1-এর ছোট বা বড় যে কোনও মান হইতে পারে।

উদা. 1. প্রমাণ কর : $\sin^2\theta\cot^2\theta+\cos^2\theta\tan^2\theta=1.$

বামপক্ষ $=\sin^2\theta.\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\cos^2\theta\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$

উদা. 2. প্রমাণ কর : $\sin^4\theta-\cos^4\theta=2\sin^2\theta-1=1-2\cos^2\theta$

বামপক্ষ $=(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=1.\{\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)\}$

$=\sin^2\theta-1+\sin^2\theta=2\sin^2\theta-1$

$=2(1-\cos^2\theta)-1=2-2\cos^2\theta-1=1-2\cos^2\theta.$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec} A-\cot A.$

বামপক্ষ $=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\dfrac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}}=\sqrt{\dfrac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}$

$=\sqrt{\dfrac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$=\operatorname{cosec} A-\cot A.$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $(1+\cot A-\operatorname{cosec} A)(1+\tan A+\sec A)=2.$

বামপক্ষ $=\left(1+\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1+\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)$

$=\dfrac{\sin A+\cos A-1}{\sin A}\times\dfrac{\cos A+\sin A+1}{\cos A}$

$=\dfrac{(\sin A+\cos A-1)(\sin A+\cos A+1)}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{(\sin A+\cos A)^2-1}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A-1}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{1+2\sin A\cos A-1}{\sin A\cos A}=\dfrac{2\sin A.\cos A}{\sin A\cos A}=2$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}+1}$$

$$=\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\sin\theta-1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)}{\sin\theta-(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\{\sin\theta+(1-\cos\theta)\}\{\sin\theta+(1-\cos\theta)\}}{\{\sin\theta-(1-\cos\theta)\}\{\sin\theta+(1-\cos\theta)\}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2+2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta-2\cos\theta}{\sin^2\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2+2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta-2\cos\theta}{\sin^2\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta+2\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta-\sin\theta\cos\theta-\cos\theta)}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta)(1-\cos\theta)}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

প্রশ্নমালা 2

নিম্নলিখিত অভেদাবলী প্রমাণ কর :

1. $\cot\theta.\sec\theta=\operatorname{cosec}\theta$. **2.** $\cot\theta\sec\theta\sin\theta=1$.

3. $\tan^2 A\cos A\operatorname{cosec} A\cot A=1$.

4. $\cot^2 A(1-\cos^2 A)=\cos^2 A$.

5. $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}.\operatorname{cosec}\theta=1$. **6.** $(\sec^2\alpha-1)\cot^2\alpha=1$.

7. $\cos\alpha\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\sec^2\alpha-1}=1$. **8.** $\sqrt{\frac{\operatorname{cosec}^2\theta-1}{\cot^2\theta+1}}=\cos\theta$

9. $\operatorname{cosec}^2 A.\tan^2 A-1=\tan^2 A$.

10. $\frac{1}{\cos^2 A}-\frac{1}{\cot^2 A}=1$. **11.** $\frac{\sec A}{\cos A}-\frac{\tan A}{\cot A}=1$.

12. $\sec^4\alpha-1=2\tan^2\alpha+\tan^4\alpha$.

13. $(\tan\theta \operatorname{cosec}\theta)^2 - (\sin\theta \sec\theta)^2 = 1.$

14. $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta.$

15. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = \dfrac{2}{\sin A}.$

16. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta.$ 17. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\cot A + \tan A} = \cos A.$

18. $\sqrt{1+\cot^2\theta}.\sqrt{\sec^2\theta - 1},\ \sqrt{1-\sin^2\theta} = 1.$

19. $\cot^2\alpha + \cot^4\alpha = \operatorname{cosec}^4\alpha - \operatorname{cosec}^2\alpha.$

20. $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha} = \tan^2\alpha.$

21. $\dfrac{1}{\sec A - \tan A} = \sec A + \tan A.$

22. $\dfrac{1}{1-\sin A} + \dfrac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A.$

23. $\dfrac{1-\tan B}{1+\tan B} = \dfrac{\cot B - 1}{\cot B + 1}.$ 24. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \tan^2\theta.$

25. $\dfrac{\tan A}{\sec A - 1} + \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} = 2\operatorname{cosec} A.$

26. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} + \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

27. $(\sin\theta + \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta.$

28. $(1+\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta + \sec\theta) = 2.$

29. $(\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1) = 2\tan\theta.$

30. $\dfrac{1+3\cos A - 4\cos^3 A}{1-\cos A} = (1+2\cos A)^2.$

31. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$ 32. $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta.$

33. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

34. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta.$

35. $\dfrac{\cot\theta + \tan\phi}{\cot\phi + \tan\theta} = \cot\theta\tan\phi.$

36. $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}=1.$

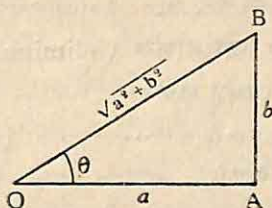
37. $\dfrac{\tan A}{\sec A-1}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=2\cot A.$

38. $1+4\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta=(\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta)^2.$

39. $(\sin\phi+\operatorname{cosec}\phi)^2+(\cos\phi+\sec\phi)^2=\tan^2\phi+\cot^2\phi+7.$

40. $\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos^2 A-\cos A\sin^2 A}=\operatorname{cosec} A+\sec A$

41. $(\sin A\cos B-\cos A\sin B)^2+(\cos A\cos B+\sin A\sin B)^2=1$

2.5. নিম্নের চিত্রে, ΔOAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\angle OAB=$ 1 সমকোণ, $\angle AOB=\theta$, $\overline{OA}=a$, $\overline{AB}=b$, $\therefore\ \overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2}$. বিভিন্ন ত্রিকোণানুপাতগুলি অতএব নিম্নরূপ হইবে :

চিত্র 26

$$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \tan\theta=\frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b},\ \sec\theta=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\quad \cot\theta=\frac{a}{b}.$$

উদা. 1. যদি $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হয়, তবে অবশিষ্ট ত্রিকোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ চিত্র 26 দেখ এবং ঐরূপ একটি চিত্র অঙ্কন কর যেন, $\overline{AB}=3$ একক দৈর্ঘ্য এবং $\overline{OB}=5$ একক দৈর্ঘ্যসম্পন্ন হয়।

তাহা হইলে, $\overline{OA}=\sqrt{\overline{BO}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

মনে কর, $\angle AOB=\theta$. এখন, ΔAOB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=5$, $\overline{AB}=3$.

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{3}{5};\quad \cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{4}{5};\quad \tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{5}{3};\quad \sec\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{5}{4};\quad \cot\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\frac{4}{3}.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ এবং $\sin\theta=\frac{3}{5}$.

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(\tfrac{3}{5})^2}$$
$$=\sqrt{1-\tfrac{9}{25}}=\tfrac{4}{5}.$$

আবার, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$; $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$;

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}\ ;\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}.$$

2.6. অপনয়ন :

মনে কর, দুইটি সমীকরণের প্রত্যেকটিতে কোন কোণ θ বর্তমান। এখন যদি কোন পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া ঐ দুইটি সমীকরণ হইতে তৃতীয় একটি সমীকরণ নির্ণয় করা যায় যাহাতে উহা কোণ θ-র মানের উপর নির্ভরশীল নহে অথচ প্রথম দুইটি সমীকরণের সত্যতার উপর নির্ভরশীল, তবে ঐ পদ্ধতিকে **অপনয়ন** (elimination) বলে। তৃতীয় সমীকরণটিকে **অপনাভক** (eliminant) বলা হয়। বুঝিবার সুবিধার জন্য একটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

$$a.\theta=b \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$
$$c.\theta=d \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) ও (ii) সমীকরণ হইতে পাই, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ অর্থাৎ, $ad-bc=0 \quad \cdot\cdot\ (iii)$

লক্ষ্য কর, (i) ও (ii) সমীকরণে θ বর্তমান কিন্তু (iii) সমীকরণে θ অবর্তমান, অর্থাৎ (iii) সমীকরণ θ-র মানের উপর নির্ভরশীল নহে। কিন্তু (i), (ii) সমীকরণ সত্য হইলে (iii) সমীকরণও সত্য হইবে। অতএব, (iii) সমীকরণটি (i) এবং (ii) সমীকরণ হইতে θ অপনয়ন করিয়া পাওয়া গেল।

উদা. 1. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে θ অপনয়ন কর।

$$x=a\cos\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$
$$y=a\sin\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণকে বর্গ করিয়া পাই,

$$x^2=a^2\cos^2\theta \quad \text{এবং} \quad y^2=a^2\sin^2\theta$$

এখন, উভয়কে যোগ করিয়া, $x^2+y^2=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2.1$,

অর্থাৎ $x^2+y^2=a^2$.

উদা. 2. নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে θ অপনয়ন কর।

$$a\tan^3\theta=b \quad \text{এবং} \quad c\cos^3\theta=d.$$

প্রথমটি হইতে, $\tan^3\theta = \frac{b}{a}$ $\quad\therefore\quad \tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

দ্বিতীয়টি হইতে, $\cos^3\theta = \frac{d}{c}$ $\quad\therefore\quad \cos\theta = \left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\quad \sec\theta = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$

আবার যেহেতু, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad\therefore\quad \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$

2.7. সর্তাধীন অভেদাবলী :

নিম্নে কতকগুলি সর্তাধীন অভেদাবলী উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইল।

উদা. 1. যদি $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

এখানে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4.$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4.$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4.$

বা, $4\sin^2\theta = 1 \quad\therefore\quad \sin^2\theta = \frac{1}{4}$ $\quad\cdots\quad\cdots (i)$

আবার, $4(1 - \cos^2\theta) = 1$ বা, $4 - 4\cos^2\theta = 1$

বা, $4\cos^2\theta = 3 \quad\therefore\quad \cos^2\theta = \frac{3}{4}$ $\quad\cdots\quad\cdots (ii)$

(i) এবং (ii) হইতে $\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \quad\therefore\quad \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

উদা. 2. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হইলে, প্রমাণ কর $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$

এখানে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$

(উভয়পক্ষকে বর্গ করিয়া)

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) + b^2(1 - \cos^2\theta) - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$

বা, $a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\therefore\quad a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$

উদা. 3. যদি $x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ এবং $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর $x^2 + y^2 = 1$.

এখানে, যেহেতু $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$. $\therefore$ $x \sin \alpha = y \cos \alpha$

এখন, $x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $x \sin^3 \alpha + y \cos \alpha, \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $x \sin^3 \alpha + x \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $x \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $x = \cos \alpha$ $\therefore$ $x^2 = \cos^2 \alpha$ ... ... (i)

অনুরূপে, $x \sin^3 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $x \sin \alpha . \sin^2 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $y \cos \alpha \sin^2 \alpha + y \cos^3 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $y \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $y = \sin \alpha$ $\therefore$ $y^2 = \sin^2 \alpha$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া $x^2 + y^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

উদা. 4. $\dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 y} + \dfrac{\sin^4 x}{\sin^2 y} = 1$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = 1$.

এখানে, $\dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 y} + \dfrac{\sin^4 x}{\sin^2 y} = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ (মনে কর)

বা, $\dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 y} - \cos^2 x = \sin^2 x - \dfrac{\sin^4 x}{\sin^2 y}$

বা, $\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y} [\cos^2 x - \cos^2 y] = \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 y} [\sin^2 y - \sin^2 x]$

বা, $\dfrac{\sin^2 y}{\sin^2 x}[\cos^2 x - \cos^2 y] = \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 x}[\sin^2 y - \sin^2 x]$

বা, $\dfrac{\sin^2 y}{\sin^2 x}[1 - \sin^2 x - 1 + \sin^2 y] = \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 x}[1 - \cos^2 y - 1 + \cos^2 x]$

বা, $\dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x} - \sin^2 y = \cos^2 y - \dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x}$

বা, $\dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = \cos^2 y + \sin^2 y$

$\therefore$ $\dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = 1$.

প্রশ্নমালা 3

1. ত্রিকোণমিতিক কোণগুলিকে (*i*) sec (*ii*) cosec এবং (*iii*) cot-এর রূপে প্রকাশ কর।

2. $\tan\theta=\frac{1}{2}$ হইলে, অন্যান্য ত্রিকোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় কর।

3. $\tan\theta=t$ হইলে, অন্যান্য ত্রিকোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় কর।

4. $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে, $2\sin\theta+\cos\theta$ এর মান কত?

5. যদি $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\phi=\frac{12}{13}$ হয় এবং θ ও ϕ উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হইলে, $\dfrac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. যদি $\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\phi-\sec^2\phi}{\operatorname{cosec}^2\phi+\sec^2\phi}$ এর মান কত?

7. যদি $\sec^2 A=2+2\tan A$ হয়, তবে $\tan A$-এর মান নির্ণয় কর।

8. $\cot\theta=\frac{15}{8}$ হইলে, $\cos\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$-র মান নির্ণয় কর।

9. যদি $\cot\theta=\dfrac{b}{a}$ হয়, তবে $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$-এর মান কত?

10. যদি $\tan\theta+\sec\theta=x$ হয়, তবে $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $4\cos\theta+3\sin\theta=5$ হয়, তবে $\sin\theta$ এর মান কত?

12. $5\cos^2\theta+2\sin^2\theta=3$ হইলে, $\tan\theta$ এর মান কত?

13. যদি $1+\sin^2\theta=3\sin\theta.\cos\theta$ হয়, তবে $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে θ অপনয়ন কর। (14 হইতে 24)

14. $l=\cos\theta,\quad m=\sin\theta.$ 15. $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$

16. $x=a+\cos\theta,\quad y=b+\sin\theta.$

17. $x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta.$ 18. $x=a\sec\theta,\quad y=b\tan\theta.$

19. $x=c(\sec\theta+\tan\theta),\quad y=c(\sec\theta-\tan\theta).$

20. $2\cos\theta+\sin\theta=l,\quad \cos\theta-\sin\theta=m.$

21. $x\sin\theta+y\cos\theta=3,\quad y\sin\theta-x\cos\theta=4.$

22. $\cos\theta+\sin\theta=p,\quad \tan\theta+\cot\theta=q.$

23. $\tan\theta+\sin\theta=x,\quad \tan\theta-\sin\theta=y.$

24. $a\cos\theta+b\sin\theta+c=0,\quad a'\cos\theta+b'\sin\theta+c'=0.$

25. যদি $\cos\phi-\sin\phi=m$ এবং $\sec\phi+\operatorname{cosec}\phi=n$ হয়, তবে দেখাও যে, $n^2=(2-m^2)(4+m^2n^2).$

26. যদি $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর,
$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta.$$

27. যদি $\tan\theta = \frac{\sin\phi - \cos\phi}{\sin\phi + \cos\phi}$ হয়, তবে প্রমাণ কর,
$$\sqrt{2}\cos\theta = \sin\phi + \cos\phi.$$

28. যদি $\sin\theta = l$ এবং $\tan\theta = m$ হয়, প্রমাণ কর, $(1 - l^2)(1 + m^2) = 1$.

29. যদি $\sin^2\alpha + \sin^4\alpha = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\tan^4\alpha - \tan^2\alpha = 1$.

30. যদি $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\phi$ হয়, তবে প্রমাণ কর
$\cos^2\phi - \sin^2\phi = \tan^2\theta$.

31. যদি $a\cos\alpha = b\sin\alpha = \frac{2c\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$(a^2 + b^2)^2 = 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$.

32. $a\tan^2\theta + b\tan\theta + c = a\cot^2\theta + b\cot\theta + c = 0$ হইলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$.

33. যদি $\sin A = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\cot A = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

34. $\cot\theta = \frac{m}{n}$ হইলে, প্রমাণ কর $\frac{m\cos\theta - n\sin\theta}{m\cos\theta + n\sin\theta} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$.

35. যদি $\sin\theta - \cos\theta = p$ এবং $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = q$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $q(1 - p^2) = 2p$.

36. $m = \frac{1 + \sin\phi}{\cos\phi}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{1}{m} = \frac{1 - \sin\phi}{\cos\phi}$.

37. যদি $m\cos\theta + n\sin\theta = 1$ এবং $p\cos\theta + q\sin\theta = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $(p - m)^2 + (q - n)^2 = (mq - np)^2$.

38. $\sin A + \cos A = 1$ হইলে, প্রমাণ কর, $\sin A - \cos A = \pm 1$.

39. $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\phi$ হইলে, প্রমাণ কর, $\cos^2\phi = 2\cos^2\theta$.

40. যদি $a^2\sec^2\theta - b^2\tan^2\theta = c^2$ হয়, তবে দেখাও যে,
$$\operatorname{cosec}\theta = \pm\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

41. যদি $x = r\cos A\cos B$, $y = r\cos A\sin B$, $z = r\sin A$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

42. $\tan A = \frac{m\sin B}{1 - m\cos B}$ এবং $\tan B = \frac{n\sin A}{1 - n\cos A}$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{m}{n}.$$

তৃতীয় অধ্যায়

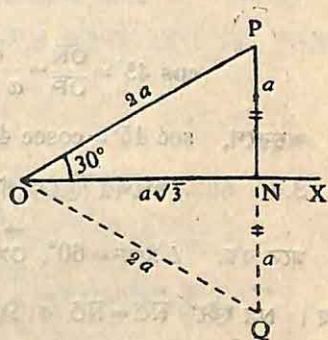
কয়েকটি বিশেষ কোণের ত্রিকোণানুপাত

3.1. এই অধ্যায়ে 0°, 30°, 45°, 60°, 90°—এই কয়টি কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করা হইবে। সর্বদা এইগুলি ব্যবহৃত হয় বলিয়া এই মানগুলি স্মরণ রাখা কর্তব্য।

3.2. 30° কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান :

চিত্র 27

মনে কর, $\overrightarrow{OX}$ ঘূর্ণায়মান রেখাটি OX অবস্থান হইতে ঘুরিয়া ∠XOP = 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। $\overrightarrow{OP}$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনও বিন্দু P হইতে $\overrightarrow{OX}$-র উপর $\overline{PN}$ লম্ব টান। অতএব ∠OPN = 60°.

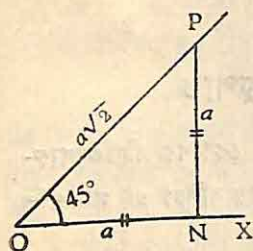
$\overline{PN}$-কে বর্ধিত করিয়া ইহার উপর Q বিন্দুটি লও যাহাতে $\overline{PN} = \overline{NQ}$ হয়। OQ যোগ কর। সহজেই দেখা যায় যে, △OPN ও △OQN সর্বসম। অতএব, ∠OQN ≅ ∠OPN = 60°, ∠NOP ≅ ∠NOQ = 30° অর্থাৎ ∠POQ = 60°. অতএব △POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

উপরোক্ত চিত্রে, মনে কর, $\overline{PN} = a$. অতএব $\overline{PQ} = 2\overline{PN} = 2a$. আবার, $\overline{PQ} \cong \overline{OP} = 2a$; $\therefore \overline{ON} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PN}^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

অতএব, $$\sin 30^\circ = \sin PON = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos PON = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot 30^\circ = \frac{\overline{ON}}{\overline{PN}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{\overline{OP}}{\overline{PN}} = \frac{2a}{a} = 2, \quad \sec 30^\circ = \frac{\overline{OP}}{\overline{ON}} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3.3. 45° কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান :

চিত্র 28

মনে কর, $\angle XOP = 45^\circ$, $\overrightarrow{OX}$-র উপরে $\overline{PN}$ লম্ব। অতএব, ΔPON একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\angle PON \cong \angle OPN = 45^\circ$. $\therefore$ $\overline{PN} \cong \overline{ON}$.

মনে কর, $\overline{PN} = a$; যেহেতু $\overline{PN} \cong \overline{ON}$,

$\therefore$ $\overline{ON} = a$ এবং $\overline{OP} = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{PN}^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$
$= a\sqrt{2}$.

অতএব, $\sin 45^\circ = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \tan 45^\circ = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} = \frac{a}{a} = 1$$

অনুরূপে, $\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$, $\cot 45^\circ = 1$.

3.4. 60° কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান :

মনে কর, $\angle XOP = 60^\circ$, $\overrightarrow{OX}$-র উপরে $\overline{PN}$ লম্ব। $\overrightarrow{NX}$ হইতে $\overline{NQ} = \overline{NO}$ কাটিয়া লও। PQ যোগ কর। তাহা হইলে ΔPON এবং ΔPNQ সর্বসম। অতএব, $\angle PQN \cong \angle PON = 60^\circ$. অতএব, ΔPOQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

চিত্র 29

এবং $\overline{OP} \cong \overline{OQ} = 2\overline{ON}$.

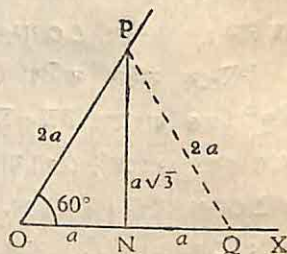
মনে কর, $\overline{ON} = a$ অতএব $\overline{OP} = 2a$ এবং

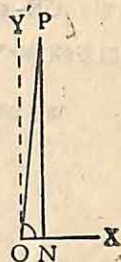
$\overline{PN} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{ON}^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

অতএব, $\sin 60^\circ = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{OP}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

অনুরূপে, $\cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ = 2$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

3.5. 90° কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান :

মনে কর, ঘূর্ণায়মান রেখা $\overrightarrow{OX}$, $\angle XOP$ উৎপন্ন করিল যাহা প্রায় 1 সমকোণের সমান। $\overrightarrow{OX}$-এর উপরে লম্ব $\overline{PN}$. যেহেতু, $\angle XOP$ প্রায় 1 সমকোণের সমান, $\overline{ON}$-এর দৈর্ঘ্য নিতান্তই ক্ষুদ্র এবং $\angle XOP$ বাড়িয়া যতই 1 সমকোণের নিকটবর্তী হইবে, $\overline{ON}$-এর দৈর্ঘ্য ততই ক্ষুদ্রতর হইবে। এইভাবে ক্রমশঃ $\overline{PN}$-এর দৈর্ঘ্য $\overline{OP}$-র দৈর্ঘ্যের নিকটবর্তী হইবে এবং $\angle XOP$ যখন 90°, $\overline{PN}$ রেখা এই চরম অবস্থায় $\overline{OP}$-র উপর সমপাতিত হইবে। ফলে, $\overline{ON}$-এর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া চরম অবস্থায় শূন্য হইবে।

চিত্র 30

অতএব, $\sin 90^\circ = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{OP}}$-র চরম অবস্থা $= 1.$

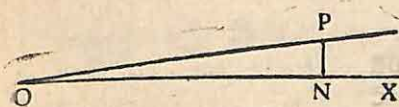
$\cos 90^\circ = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$-র চরম অবস্থা $= 0.$

$\tan 90^\circ = \dfrac{\overline{PN}}{\overline{ON}}$-র চরম অবস্থা $= \dfrac{\overline{PN}}{0} \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত।*

অনুরূপে, $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$, $\sec 90^\circ =$ চরম অবস্থায় $\dfrac{\overline{OP}}{0} \rightarrow$ অসংজ্ঞায়িত।

$\cot 90^\circ =$ চরম অবস্থায় $\dfrac{0}{\overline{PN}} = 0.$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : '*' গণিতশাস্ত্রে কোনও সংখ্যাকে শূন্য দ্বারা ভাগ অর্থহীন বা অসংজ্ঞায়িত (undefined) বলা হয়।

3.6. 0° কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মান :

চিত্র 31

মনে কর, ঘূর্ণায়মান রেখা $\overrightarrow{OX}$ অতি ক্ষুদ্র কোণ XOP উৎপন্ন করিয়াছে। মনে কর, $\overline{PN}$, $\overrightarrow{OX}$-র উপরে লম্ব। যেহেতু $\angle XOP$ নিতান্তই ক্ষুদ্র, অতএব $\overline{PN}$-এর দৈর্ঘ্যও অতি ক্ষুদ্র। এখন $\angle XOP$ ক্রমশঃ কমিয়া যতই 0°-র নিকটবর্তী হইবে $\overline{PN}$ দৈর্ঘ্য ততই ক্ষুদ্রতর হইবে। এইভাবে ক্রমশঃ

$\overline{OP}$-র দৈর্ঘ্য $\overline{ON}$-এর দৈর্ঘ্যের নিকটবর্তী হইবে এবং $\angle XOP$ যখন $0°$, $\overline{OP}$ এই চরম অবস্থায় $\overline{ON}$-এর উপর সমপাতিত হইবে। ফলে, PN-এর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া চরম অবস্থায় শূন্য হইবে।

অতএব, $\sin 0° = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}}$-র চরম অবস্থা $= 0$

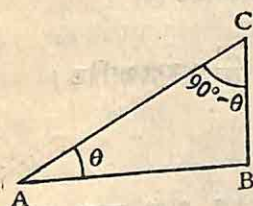
$\cos 0° = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$-র চরম অবস্থা $= 1$.

$\tan 0° = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}$-র চরম অবস্থা $= 0$

অনুরূপে, $\cot 0° = \frac{\overline{ON}}{\overline{PN}}$-এর চরম অবস্থা = অসংজ্ঞায়িত।

$\operatorname{cosec} 0° = \frac{\overline{OP}}{\overline{PN}}$-এর চরম অবস্থা = অসংজ্ঞায়িত।

$\sec 0° = \frac{\overline{OP}}{\overline{ON}}$-এর চরম অবস্থা $= 1$.

3.7. পূরক কোণের ত্রিকোণানুপাতগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ :

চিত্র 32

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\angle ABC = 1$ সমকোণ। মনে কর, $\angle BAC = \theta$, অতএব, $\angle ACB = 90° - \theta$. এখন, $\angle BAC + \angle ACB = \theta + 90° - \theta = 90°$.

সংজ্ঞা : যদি দুইটি কোণের যোগফল এক সমকোণ হয়, তবে একটিকে অপরটির পূরক কোণ (complementary angle) বলে।

উপরোক্ত চিত্রে, $\angle BAC$, $\angle ACB$-র পূরক কোণ। অনুরূপে, $\angle ACB$, $\angle BAC$-র পূরক কোণ। অর্থাৎ, **কোন কোণের পরিমাপ θ হইলে, উহার পূরক কোণ $90° - \theta$ হইবে।**

এখন, $\sin \theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

অনুরূপে, $\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, $\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\cot \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

$\sec \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ এবং $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

আবার, $\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\cos\theta.$

অনুরূপে, $\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\sin\theta.$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\sec\theta.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : 1 উপরোক্ত আলোচনা হইতে বিশেষভাবে লক্ষ্য কর :

কোণ θ-র সাইন $=\theta$-র পূরক কোণ $(90-\theta)$-এর কোসাইন।

আবার, কোণ θ-র কোসাইন $=\theta$-র পূরক কোণ $(90-\theta)$-এর সাইন।

অর্থাৎ, $\sin\theta=\cos(90-\theta)$ এবং $\cos\theta=\sin(90-\theta)$.

তোমরা অনুচ্ছেদ 3.2. – 3.6. হইতে কতকগুলি বিশেষ কোণের ত্রিকোণানুপাত নির্ণয় করা শিখিয়াছ। লক্ষ্য কর, 30°-র পূরক কোণ 60° হওয়ায় $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$; আবার $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$. অনুরূপে, 0° ও 90° পূরক কোণ।

অতএব, $\sin 0^\circ=0=\cos 90^\circ$; $\cos 0^\circ=1=\sin 90^\circ$, ইত্যাদি।

অনুরূপে, $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\cot(90^\circ-30^\circ)=\cot 60^\circ$,

$\cot 30^\circ=\sqrt{3}=\tan 60^\circ$, $\sec 30^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\operatorname{cosec} 60^\circ$

$\operatorname{cosec} 30^\circ=2=\sec 60^\circ$ ইত্যাদি।

2. পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, 0°, 30°, 45°, 60°, 90°—এই কয়টি কোণের

ত্রিকোণানুপাতগুলির মান স্মরণ রাখা বিশেষ প্রয়োজন। নিম্নের ছকে এই মানগুলি সুবিধার জন্য একত্রে সন্নিবেশিত হইল।

	0	1	2	3	4
	0^c বা $0°$	$30°$ বা $\frac{\pi}{6}$	$45°$ বা $\frac{\pi}{4}$	$60°$ বা $\frac{\pi}{3}$	$90°$ বা $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*

'*—অসংজ্ঞায়িত।

sin ও cosine-এর মানগুলি নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে মনে রাখা সুবিধাজনক। 0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলিকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া বর্গমূল লইলে যথাক্রমে sine-এর $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$-র এবং cosine-এর $90°$, $60°$, $45°$, $30°$ ও $0°$-র মানগুলি পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $\theta = 30°$ কোণের জন্য $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ সম্বন্ধটির সত্যতা নিরূপণ কর।

যেহেতু, $\theta = 30°$, $\cos 2\theta = \cos(2\times 30°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

আবার, $\tan\theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অতএব, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$.

উদা. 2. $\cot^2\frac{\pi}{6} - 2\cos^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4} - 4\sec^2\frac{\pi}{6}$-এর মান নির্ণয় কর।

বামপক্ষ $= (\cot 30°)^2 - 2(\cos 60°)^2 - \frac{3}{4}(\sec 45°)^2 - 4(\sec 30°)^2$.

$= (\sqrt{3})^2 - 2(\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}(\sqrt{2})^2 - 4.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 3 - 2.\frac{1}{4} - \frac{3}{4}.2 - 4.\frac{4}{3} = 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{16}{3} = -\frac{13}{3}$.

উদা. 3. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে, $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর।

এখানে, $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$

বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$ বা, $\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\times\cos\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

বা, $\dfrac{1}{\sin\theta}=2$ বা, $\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin 30°$ [$\because \sin 30°=\frac{1}{2}$]

$\therefore\ \theta=30°.$

উদা. 4. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে,

$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সমাধান কর।

বা, $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$ [যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°\ \therefore\ \theta=30°.$

উদা. 5. যদি $A+B=90°$ হয়, তবে দেখাও যে,

$\dfrac{2\sin A\cos A}{1-\sin^2 B}=2\cot A$

বামপক্ষ $=\dfrac{2\sin A\cos A}{1-\sin^2 B}$

$=\dfrac{2\sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$

$=\dfrac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A}$

$=2\cot A.$

$\because\ A+B=90°$
$\therefore\ A=90°-B$
$\therefore\ \cos A=\cos(90°-B)$
$\therefore\ \cos A=\sin B.$

প্রশ্নমালা 4

1. যদি $\theta=30°$ হয়, তবে নিম্নোক্ত সম্বন্ধগুলির সত্যতা নিরূপণ কর :

(i) $\sin 2\theta=2\sin\theta.\cos\theta.$

(ii) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

(*iii*) $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$.

(*iv*) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

(*v*) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

2. যদি $A = 60°$, $B = 30°$ হয়, তবে নিম্নের সূত্রগুলির সত্যতা প্রমাণ কর :

(*i*) $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

(*ii*) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

(*iii*) $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

(*iv*) $\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cos B$.

(*v*) $\tan^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{1 + \cos 2B}$.

3. প্রমাণ কর :

(*i*) $\frac{2 \tan 30°}{- \tan^2 30°} = \sqrt{3}$. (*ii*) $\sin \frac{\pi}{3} . \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} . \sin \frac{\pi}{6} = 1$.

(*iii*) $4 \tan^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 4$.

(*iv*) $\sin 60° \sin 45° + \cos 60° \cos 45° = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$.

(*v*) $\frac{\tan \frac{\pi}{3} - \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 0°}{\cot 60° + \sec^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} - 3$.

(*vi*) $\operatorname{cosec}^2 45° \sec^2 30° (\sin^3 30° + 4 \cot^2 45° - \sec^2 60°) = \frac{1}{3}$.

(*vii*) $\frac{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\frac{2 \tan 45°}{1 + \tan^2 45°}$. (*ii*) $\frac{\tan^3 60° - 2 \sin 60°}{3 - \cot 30°}$.

(*iii*) $\frac{4}{3} \cot^2 \frac{\pi}{6} + 3 \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \tan^2 \frac{\pi}{6}$.

(*iv*) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

(*v*) $\dfrac{1+2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}} + \dfrac{1-2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}}$

5. θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে, নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :

(*i*) $\tan\theta = 3\cot\theta$. (*ii*) $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$.

(*iii*) $4\sin\theta = 3\operatorname{cosec}\theta$. (*iv*) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$.

(*v*) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$. (*vi*) $2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 3 = 0$.

(*vii*) $\tan\theta - \operatorname{cosec}\theta = \cot\theta$. (*viii*) $\sin\theta(3\tan\theta + \cot\theta) = 5$.

(*ix*) $\cos^2\theta + 5\cos\theta - \sin^2\theta - 2 = 0$.

(*x*) $\tan\theta - 2\tan\theta\sin\theta + 2\sin\theta = 1$.

6. যদি A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan(A+B) = \sqrt{3}$, $\tan(A-B) = 1$ হয়, তবে A এবং B-এর মান বাহির কর।

7. θ এবং ϕ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে, নিম্নের সমীকরণ সমাধান কর :

$$\sin(2\theta - \phi) = 1 \quad \text{এবং} \quad \cos(\theta + \phi) = \tfrac{1}{2}.$$

8. যদি $A + B = 90^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে,

(*i*) $\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 B}{\cos^2 A + \sin^2 B} = \tan^2 A$.

(*ii*) $\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B} = \sin^2 A + \cos^2 A$.

(*iii*) $\tan A + \tan B = \dfrac{1}{\sin A \sin B}$.

9. নিম্নলিখিত শর্তগুলি হইতে A-এর মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\cot(90^\circ - A) = \sqrt{3}$. (*ii*) $\sin^2(90^\circ - A) = \frac{1}{2}$.

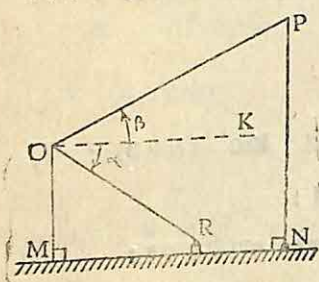
(*iii*) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{3}{4}$. (*iv*) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sqrt{3}$.

চতুর্থ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব

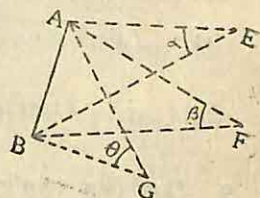
4.1. এই অধ্যায়ে আমরা ত্রিকোণমিতির সাহায্যে কোন বাড়ীর উচ্চতা, কোন পর্বতের উচ্চতা, নদীর বিস্তার, দুইটি স্থানের দূরত্ব প্রভৃতি কিভাবে সহজে নির্ণয় করা যায়, তাহা আলোচনা করিব।

4.2. উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ :

মনে কর, তুমি কোন বাড়ীর দোতলার বারান্দায় দাঁড়াইয়া সেই বাড়ীর সম্মুখে রাস্তার উপরিস্থিত কোন বস্তু দেখিতেছ। তাহা হইলে নিশ্চয়ই তোমাকে সোজা না দেখিয়া নীচের দিকে দেখিতে হইবে। আবার মনে কর, সেই বাড়ীর সম্মুখে রাস্তার বিপরীত দিকে অবস্থিত কোন তিনতলা বাড়ীর ছাদে কোন বস্তু দেখিতেছ। তখন, নিশ্চয়ই তোমাকে সোজা না দেখিয়া উপরের দিকে দেখিতে হইবে।

চিত্র 33

অর্থাৎ, পার্শ্ববর্তী চিত্রে মনে কর, O বিন্দুতে দাঁড়াইয়া R বিন্দু দেখিতেছ, এবং $\overrightarrow{OK}$, O এবং R বিন্দুগামী উল্লম্বতলে অঙ্কিত **অনুভূমিক** (Horizontal) **রেখা,** তাহা হইলে $\angle KOR$ ($=\alpha$)-কে **অবনতি কোণ** (Angle of depression) বলে।

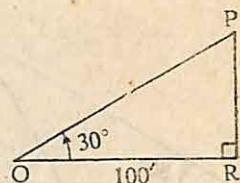
আবার, O বিন্দুতে দাঁড়াইয়া O এবং R বিন্দুগামী উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত P-বিন্দুতে কোন বস্তু দেখিতেছ এবং $\overrightarrow{OK}$ ঐ একই উল্লম্ব সমতলে অঙ্কিত অনুভূমিক রেখা, তাহা হইলে, $\angle KOP$ ($=\beta$)-কে **উন্নতি কোণ** (Angle of elevation) বলে।

সম্মুখ কোণ (Subtended angle) **:** কোন রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় সেই রেখার বহিঃস্থিত কোন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে সেই বিন্দুতে সেই রেখার সম্মুখ কোণ বলে। এখানে, $\overline{AB}$ রেখাংশ E, F, G বিন্দুতে α, β, θ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

চিত্র 34

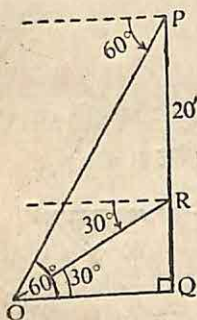
বিশেষ দ্রষ্টব্য : উন্নতি কোণ বা অবনতি কোণ সর্বদা অনুভূমিক রেখা হইতে মাপিতে হইবে।

উদা. 1. 100 ফুট দূরত্ব হইতে কোন মন্দিরের চূড়ার উন্নতি কোণ 30° হইলে সেই মন্দিরের উচ্চতা নির্ণয় কর।

চিত্র 35

মনে কর, $\overline{PR}$ মন্দিরের উচ্চতা। R হইতে 100 ফুট দূরে অবস্থিত O বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি কোণ 30° অর্থাৎ $\overline{OR}=100$ ফুট এবং $\angle ROP=30°$.

এখন, $\tan 30° = \frac{\overline{PR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{PR}}{100}$ $\therefore$ $\overline{PR} =$

$100.\tan 30° = 100 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{2} = \frac{173 \cdot 2}{3} = 57 \cdot 73$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 2. কোন বৃক্ষের শীর্ষ হইতে ভূমিস্থিত কোন বিন্দুর অবনতি কোণ 60°. এবং শীর্ষ হইতে 20 ফুট নীচে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে সেই বিন্দুর অবনতি কোণ 30°. বৃক্ষের উচ্চতা কত ?

চিত্র 36

মনে কর, $\overline{PQ}$ বৃক্ষের উচ্চতা, P উহার শীর্ষবিন্দু, P বিন্দু হইতে O বিন্দুর অবনতি কোণ 60° অর্থাৎ $\angle POQ = 60°$.

আবার, $\overline{PR} = 20$ ফুট, R হইতে O বিন্দুর অবনতি কোণ 30° অর্থাৎ $\angle ROQ = 30°$.

এখন, $\tan 60° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$ $\therefore$ $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \sqrt{3}$ ... (i)

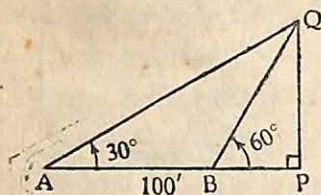
এবং $\tan 30° = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}}$ $\therefore$ $\frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ... (ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $\frac{\overline{PQ}-\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\overline{PR}}{\overline{OQ}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\overline{OQ} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

(i) নং সমীকরণে $\overline{OQ}$-এর মান বসাইয়া,

$\overline{PQ} = \overline{OQ}\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 30$ ফুট $\therefore$ বৃক্ষের উচ্চতা = 30 ফুট।

উদা. 3. কোন বৃক্ষের দিকে 100 ফুট অগ্রসর হওয়ায় ইহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° হইতে 60° হইল। বৃক্ষের উচ্চতা নির্ণয় কর।

চিত্র 37

মনে কর, $\overline{PQ}$ বৃক্ষের শীর্ষ Q. কোন বিন্দু A এবং B হইতে উহার উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 60°. অর্থাৎ $\angle PAQ = 30°$ এবং $\angle PBQ = 60°$; $\overline{AB} = 100$ ফুট।

এখন, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = \cot 30°$ ... (*i*)

এবং $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PQ}} = \cot 60°$ ... (*ii*)

(*i*) হইতে (*ii*) বিয়োগ করিয়া, $\dfrac{\overline{AP} - \overline{BP}}{\overline{PQ}} = \cot 30° - \cot 60°$

বা, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{100}{\overline{PQ}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\overline{PQ} = \dfrac{100\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$

$\therefore$ বৃক্ষের উচ্চতা $50\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 4. মনুমেণ্টের শীর্ষ হইতে কোন স্তম্ভের শীর্ষ এবং ভূমির অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 60°. মনুমেণ্টের উচ্চতা 300 ফুট হইলে, স্তম্ভের উচ্চতা কত?

মনে কর, $\overline{PR}$ মনুমেণ্ট 300 ফুট এবং $\overline{AB}$ স্তম্ভটি h ফুট উচ্চ। $\overline{AK} \| \overline{BR}$ টানা হইল, সুতরাং $\overline{AB} \cong \overline{KR}$ এবং $\overline{AK} \cong \overline{BR}$.

$\angle SPA \cong \angle PAK = 45°$ এবং $\angle SPB \cong \angle PBR = 60°$

এখন, $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{BR}} = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\overline{BR} = \dfrac{300}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{3}$

আবার, $\dfrac{\overline{PK}}{\overline{AK}} = \tan 45° = 1$ $\therefore$ $\overline{PK} \cong \overline{AK} \cong \overline{BR}$

চিত্র 38

সুতরাং, $h = \overline{AB} \cong \overline{KR} = \overline{PR} - \overline{PK} = 300 - 100\sqrt{3}$
$= 300 - 173{\cdot}2 = 126{\cdot}8$ $\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা 126·8 ফুট (প্রায়)।

উদা. 5. একই উল্লম্ব-তলে অবস্থিত একটি এরোপ্লেন হইতে নদীর দুই তীরে দুইটি বিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 45°. প্লেনটি নদীর 1500 মিটার উপরে অবস্থান করিলে, নদীর বিস্তার কত ?

মনে কর, A ও B নদীর দুই তীরে দুইটি বিন্দু এবং P এরোপ্লেনের অবস্থান, $\overline{PC}=1500$ মি. উহার উচ্চতা।

$\angle CAP=60°$ এবং $\angle CBP=45°$.

এবং, নদীর বিস্তার $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$.

চিত্র 39

এখন, $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{AC}}=\tan 60°=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AC}=\dfrac{\overline{PC}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1500\sqrt{3}}{3}=500\sqrt{3}$

এবং $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}=\tan 45°=1 \quad \therefore\ \overline{BC}=\dfrac{\overline{PC}}{1}=1500$ মি.

$\therefore$ নদীর বিস্তার $\overline{AB}=1500+500\sqrt{3}=1500+866=2366$ মি. (প্রায়)।

উদা. 6. একটি স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে ও পূর্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে α এবং β. দুইটি বিন্দুর দূরত্ব a হইলে, স্তম্ভের উচ্চতা কত ?

চিত্র 40

মনে কর, $\overline{AO}$ স্তম্ভের উচ্চতা h দুইটি বিন্দু S ও E হইতে উন্নতি কোণ যথাক্রমে $\angle OSA=\alpha$ এবং $\angle OEA=\beta$. এবং $\overline{SE}=a$.

এখন, $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{SO}}=\tan\alpha$

$$\therefore\ \overline{SO}=\frac{\overline{AO}}{\tan\alpha}=\frac{h}{\tan\alpha} \quad \cdots \quad (i)$$

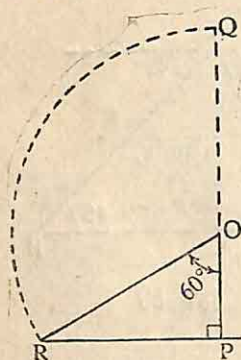
এবং, $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{EO}}=\tan\beta \ \therefore\ \overline{EO}=\dfrac{h}{\tan\beta} \cdot (ii)$

আবার, যেহেতু $\angle SOE=$ এক সমকোণ। $\therefore\ \overline{SO}^2+\overline{OE}^2=\overline{SE}^2$

[পীথোগোরাসের উপপাদ্য]

অতএব, $a^2=\dfrac{h^2}{\tan^2\alpha}+\dfrac{h^2}{\tan^2\beta}=h^2\left[\dfrac{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}{\tan^2\alpha.\tan^2\beta}\right]$

$\therefore\ h^2=a^2\left[\dfrac{\tan^2\alpha.\tan^2\beta}{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}\right] \therefore\ h=\dfrac{a.\tan\alpha.\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$.

উদা. 7. একটি সুপারী গাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার শীর্ষ 30 ফুট দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিয়াছে। যদি উভয় অংশের মধ্যবর্তী কোণ 60° হয়, তবে বৃক্ষের দৈর্ঘ্য কত ?

চিত্র 41

মনে কর, $\overline{PQ}$ বৃক্ষটি O স্থানে ভাঙ্গিয়া ভূমির R বিন্দুতে উহার শীর্ষ স্পর্শ করিয়াছে।

অর্থাৎ বৃক্ষের দৈর্ঘ্য $\overline{PQ} = \overline{OR} + \overline{OP}$.

এবং $\angle POR = 60°$. $\overline{PR} = 30$ ফুট।

এখন, $\frac{\overline{OP}}{\overline{PR}} = \cot 60°$

$\therefore \overline{OP} = \overline{PR}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$

এবং $\frac{\overline{OR}}{\overline{PR}} = \text{cosec } 60°$

$\therefore \overline{OR} = \overline{PR}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{30.2}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ বৃক্ষের দৈর্ঘ্য $= 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 30\sqrt{3} = 30 \times 1{\cdot}732$
$= 51{\cdot}96$ ফুট (প্রায়)।

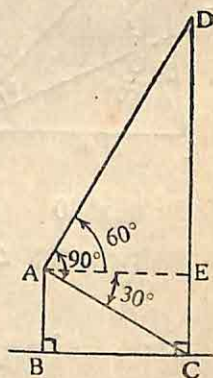
উদা. 8. কোন বাড়ীর উচ্চতা রাস্তার বিপরীত দিকে অবস্থিত অপর কোন বাড়ীর জানালায় 90° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে। সেই জানালা হইতে প্রথমোক্ত বাড়ীর শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°. যদি রাস্তার বিস্তার 30 ফুট হয়, তবে প্রথম বাড়ীর উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, $\overline{CD}$ বাড়ীর উচ্চতা, উহা $\overline{BC}$ রাস্তার বিপরীত দিকে A জানালায় 90° সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। অর্থাৎ $\angle CAD = 90°$ আবার A হইতে D-এর উন্নতি কোণ 60° অর্থাৎ $\angle EAD = 60°$; $\overline{BC} = 30$ ফুট।

এখন, $\angle CAE = \angle CAD - \angle EAD = 90° - 60° = 30°$. এবং $\overline{BC} \cong \overline{AE}$.

$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \tan 60°$. $\therefore \overline{DE} = 30.\sqrt{3}$.

এবং $\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \tan 30°$ $\therefore \overline{EC} = 30.\frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$.

$\therefore$ বাড়ীর উচ্চতা $\overline{CD} = 30\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$
$= 40\sqrt{3} = 40 \times 1{\cdot}732 = 69{\cdot}28$ ফুট (প্রায়)।

চিত্র 42

প্রশ্নমালা 5

1. 100 মিটার দূরবর্তী কোন স্থান হইতে মনুমেন্টের শীর্ষের উন্নতি কোণ 45°. মনুমেন্টের উচ্চতা কত?

2. 300 ফুট উচ্চ কোন বাড়ী হইতে ভূমির উপর কোন বিন্দুর অবনতি কোণ 30°. বাড়ীর পাদদেশ হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব কত?

3. 20 ফুট উচ্চ ল্যাম্পপোষ্টের পাদদেশ হইতে পরবর্তী ল্যাম্পপোষ্টের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° হইলে, ল্যাম্পপোষ্টদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

4. বিকাল 3টার সময় কোন পোষ্ট এবং তাহার ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হইলে, সূর্যের উন্নতি কোণ কত?

5. 30 ফুট উচ্চতাবিশিষ্ট কোন পোষ্টের গায়ে একটি মই এমনভাবে অবস্থান করিতেছে যে, মইটি ভূমির সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এবং পোষ্ট ও মই-এর শীর্ষ একই বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। মই-এর দৈর্ঘ্য কত?

6. যদি সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হয়, তবে 75 ফুট উচ্চ কোন পোষ্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য কত হইবে?

7. 100 মিটার দূরবর্তী কোন বিন্দু A হইতে একটি বৃক্ষশীর্ষের উন্নতি কোণ 30°. একই সমতলে অবস্থিত অপর বিন্দু B হইতে উন্নতি কোণ 45°. বৃক্ষ হইতে B বিন্দুর দূরত্ব কত?

8. দুইটি বিন্দু হইতে কোন স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি কোণ 30° ও 60°. বিন্দুদ্বয় স্তম্ভের একই দিকে এবং একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত। বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 40 মিটার হইলে, স্তম্ভের উচ্চতা কত?

9. একটি 50 ফুট উচ্চ খুঁটির বিপরীত দিকে দুইটি বিন্দু একই সমতলে এবং একই রেখায় অবস্থিত। বিন্দুদ্বয় হইতে খুঁটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 30° হইলে, বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. কোন বিন্দু হইতে একটি স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি কোণ 30°. স্তম্ভের দিকে 30 ফুট অগ্রসর হওয়ায় উন্নতি কোণ 60° হইল; স্তম্ভের উচ্চতা কত?

11. অস্তগামী সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হইতে 30°-তে পরিণত হওয়ায়, কোন পোষ্টের ছায়ার দৈর্ঘ্য 50 ফুট বাড়িয়া গেল; পোষ্টের দৈর্ঘ্য কত?

12. কোন বৃক্ষের দিকে 75 ফুট অগ্রসর হওয়ায়, বৃক্ষশীর্ষের উন্নতি কোণ 30° হইতে 45°-তে পরিবর্তন হইল; বৃক্ষের উচ্চতা কত?

13. নদীতীরে কোন বিন্দু হইতে উহার ঠিক বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কোন বৃক্ষের উন্নতি কোণ 45° এবং সেইস্থান হইতে 100 ফুট পশ্চাদ্‌গমন করিলে উন্নতি কোণ 30° হয় ; নদীর বিস্তার কত ?

14. ভূমিস্থিত কোন বিন্দু হইতে একটি বাড়ীর দোতলায় কোন বিন্দুর উন্নতি কোণ 30° কিন্তু ছাদের উন্নতি কোণ 60°. দোতলার উচ্চতা 10 ফুট হইলে, বাড়ীর উচ্চতা কত ?

15. বহুতলবিশিষ্ট কোন অট্টালিকার ছাদ হইতে ভূমিস্থিত কোন বিন্দুর অবনতি কোণ 60° কিন্তু ছাদ হইতে 50 ফুট নীচে কোন বিন্দু হইতে অবনতি কোণ $45.^\circ$ অট্টালিকার উচ্চতা নির্ণয় কর।

16. মনুমেণ্টের শীর্ষ হইতে ভূমিস্থিত কোন বিন্দুর অবনতি কোণ 60°. শীর্ষবিন্দু হইতে 100 ফুট নামিয়া আসায় অবনতি কোণ 15° কমিয়া গেল, মনুমেণ্ট হইতে সেই বিন্দুর দূরত্ব কত ?

17. কোন বাড়ীর ছাদ হইতে রাস্তার বিপরীত দিকে অবস্থিত কোন ল্যাম্প-পোষ্টের শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 60°. রাস্তার বিস্তার 30 ফুট হইলে, ল্যাম্পপোষ্টের উচ্চতা কত ?

18. পর্বতশিখর হইতে কোন মন্দিরের শীর্ষ ও ভূমির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 45°. মন্দিরের উচ্চতা 500 ফুট হইলে, পর্বতশৃঙ্গের উচ্চতা কত ?

19. 100 ফুট উচ্চ একটি খুঁটি ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার উপরের অংশ ভূমির সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করিল, খুঁটি ভূমির কত উপরে ভাঙ্গিয়াছিল ?

20. কোন বৃক্ষ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া উহার শীর্ষ ভূমির সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিয়া পাদদেশ হইতে 40 ফুট দূরে ভূমিকে স্পর্শ করিল, বৃক্ষের উচ্চতা নির্ণয় কর।

21. 40 ফুট প্রশস্ত কোন পথের দুইপার্শ্বে সমান উচ্চ দুইটি খুঁটি আছে। উভয়ের মধ্যে পথের উপরিস্থিতি কোন বিন্দুতে খুঁটি দুইটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং 30° হইলে, উহাদের উচ্চতা ও বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

22. দুইটি উল্লম্ব দণ্ডের মধ্যে ব্যবধান 120 ফুট। উহাদের একটি উচ্চতা অপরটির দ্বিগুণ। উভয় দণ্ডের মধ্যস্থিত বিন্দু হইতে শীর্ষদ্বয়ের উন্নতি কোণ θ এবং $90^\circ - \theta$ হইলে, দণ্ড দুইটির উচ্চতা কত ?

23. দুইটি স্তম্ভের দূরত্ব 60 ফুট। প্রথম স্তম্ভের শীর্ষ হইতে দ্বিতীয় স্তম্ভের শীর্ষের অবনতি কোণ 30°. যদি প্রথম স্তম্ভের উচ্চতা 200 ফুট হয়, তবে দ্বিতীয়টি কত ?

24. দুইটি খুঁটির একটির ভূমি হইতে অপরটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° আবার দ্বিতীয়টির ভূমি হইতে প্রথমটির উন্নতি কোণ 30°. খুঁটি দুইটির উচ্চতার অনুপাত কত?

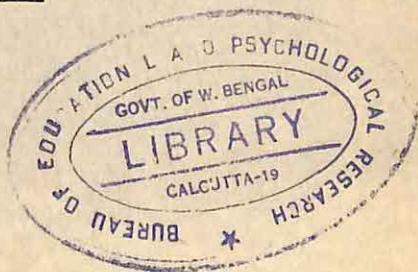
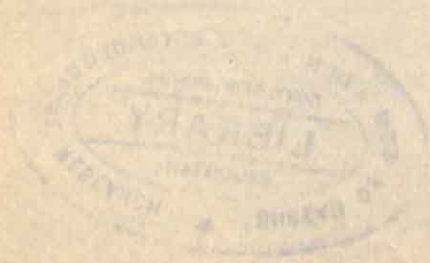
25. একটি অসমাপ্ত স্তম্ভের ভূমি হইতে 300 ফুট দূরবর্তী কোন বিন্দুতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° ছিল। স্তম্ভটিকে আর কতটা উঁচু করিলে, ঐ বিন্দুতে চূড়ার উন্নতি কোণ 45° হইবে?

26. একটি সোজা রাস্তার উপর একই উল্লম্বতলে অবস্থিত কোন এরোপ্লেন হইতে দুইটি পর পর মাইলপোষ্ট-এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°. যদি মাইলপোষ্টদ্বয় এরোপ্লেনের (a) একই দিকে এবং (b) বিপরীতদিকে থাকে, তবে রাস্তা হইতে এরোপ্লেনের উচ্চতা কত?

27. কোন আলোকস্তম্ভ হইতে পূর্ব ও দক্ষিণ দিকে অবস্থিত দুইটি জাহাজের অবনতি কোণ 30° এবং 60°. জাহাজ দুইটির মধ্যে দূরত্ব 0·3 মাইল হইলে, আলোকস্তম্ভের উচ্চতা কত?

28. একটি মন্দিরের ঠিক পূর্বদিকে কোন চলমান গাড়ী হইতে ইহার চূড়ার উন্নতি কোণ 30°. গাড়ীটি সরলরেখায় চলিয়া 3 মিনিট পর মন্দিরটির ঠিক উত্তর-দিকে আসিলে, উন্নতি কোণ 45° হইল। গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল হইলে, মন্দিরের উচ্চতা কত?

29. কোন স্তম্ভের পশ্চিমে ভূমির উপর অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°. ঐ বিন্দু হইতে সোজা উত্তরদিকে 200 গজ যাওয়ার পর উন্নতি কোণ 30° হইলে, স্তম্ভের উচ্চতা কত?

30. কোন রাস্তার মধ্যবিন্দু হইতে উহার ঠিক বিপরীত দিকে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উন্নতি কোণ যথাক্রমে β এবং α; প্রথম খুঁটির উচ্চতা a হইলে দেখাও যে, দ্বিতীয় খুঁটির উচ্চতা $\dfrac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha}$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. $33^g 33' 33\cdot\dot{3}''$, $83^g 33' 33\cdot\dot{3}''$, $67^g 22' 22\cdot2''$, $76^g 91' 66\cdot7''$, $56^g\ 24'\ 25''$, $158^g\ 6'\ 94\cdot4''$, $48^g\ 75'\ 25''$, $22'\ 50''$, $261^g\ 34' 44\cdot4''$, $528^g\ 3'\ 33\cdot\dot{3}''$, 50^g, 150^g, 2000^g, 175^g, 160^g, $133^g\ 33'\ 33\cdot\dot{3}''$, 600^g.

2. $90°$, $67°\ 30'$, $40°\ 49'\ 1\cdot776''$, $36°\ 0'\ 40\cdot6''$, $51°\ 11'\ 10''$, $55'\ 5\cdot8''$, $89°\ 59'\ 59\cdot676''$, $30°$, $75°$, $135°$, $180°$, $160°$, $180n°$.

3. $\frac{\pi^c}{12}$, $\frac{\pi^c}{3}$, $\frac{703}{720}\pi^c$, $\frac{3557}{13500}\pi^c$, $\frac{20}{9}\pi^c$, $\frac{3\pi^c}{20}$, $\frac{3\pi^c}{8}$, $\frac{221}{360}\pi^c$, $1\cdot726268\pi^c$, $0\cdot25252\pi^c$.

4. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$. 5. $132°\ 15'\ 12\cdot6''$. 6. (*a*) $90°$, 100^g, $\pi/2$.

(*b*) $108°$, 120^g, $\frac{3\pi^c}{5}$. (*c*) $135°$, 150^g, $\frac{3\pi^c}{4}$.

(*d*) $150°$, $160^g\ 66'\ 66\cdot\dot{6}''$, $\frac{5\pi^c}{6}$. (*e*) $162°$, 180^g, $\frac{9}{10}\pi^c$.

7. (*a*) $45°$, 50^g, $\frac{\pi^c}{4}$ (*b*) $70°$, $77^g\ 77'\ 77.77''$, $\frac{7\pi^c}{18}$.

(*c*) $105°$, $116^g\ 66'\ 66\cdot\dot{6}''$. $\frac{7\pi^c}{12}$.

8. 6 এবং 8. 9. $5 : 4$. 11. $25°$. 12. $\frac{3}{5}^c$, $34°\ 21'\ 49''$.
13. $20\cdot454°$ (প্রায়)। 14. 25142·8 মাইল (প্রায়)। 15. 20 মিনিট।
16. 12 এবং 8. 17. 15 সে. মি.। 19. $3'\ 54\cdot3''$, $7'\ 23\cdot1''$
20. 1105·8 মাইল। 21. 478×10^{11} মাইল। 22. $120°$, $36°$, $24°$.
23. $\frac{2250}{6289}\pi$, $\frac{2500}{6289}\pi$, $\frac{81}{331}\pi$. 24. $\frac{2(10pm-9qn)}{n(10p-9q)}$, $\frac{2(10pm-9qn)}{m(10p-9q)}$.
26. (*i*) 7টা. $28\frac{4}{11}$ মি. এবং 7 টা. 48 মি.। (*ii*) 7 টা. 10 মি.।
28. $\frac{3}{4}$ রেডিয়ান। 29. 51·42 মাইল (প্রায়)। 30. $20°$.

প্রশ্নমালা 3

2. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\cot\theta = 2$

3. $\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$,
$\sec\theta = \sqrt{1+t^2}$, $\cot\theta = \frac{1}{t}$. **4.** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\frac{16}{63}$. **6.** $\frac{1}{2}$

7. $\sqrt{2}+1$. **8.** $\frac{15}{17}$, $\frac{17}{8}$. **9.** $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. **10.** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **11.** $\frac{3}{5}$.
12. $\sqrt{2}$. **13.** 1 বা $\frac{1}{2}$. **14.** $l^2+m^2=1$. **15.** $x^2+y^2=r^2$.
16. $(x-a)^2+(y-b)^2=1$. **17.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **18.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
19. $xy=c^2$. **20.** $2l^2-2lm+5m^2=9$. **21.** $x^2+y^2=25$.
22. $1+\frac{2}{q}=p^2$. **23.** $x^2-y^2=4\sqrt{xy}$.
24. $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$.

প্রশ্নমালা 4

4. (*i*) 1. (*ii*) $\sqrt{3}+1$. (*iii*) $\frac{10}{3}$. (*iv*) 1. (*v*) $\sqrt{3}$.
5. (*i*) 60°. (*ii*) 60° (*iii*) 60°. (*iv*) 30°. (*v*) 30°. (*vi*) 45°. (*vii*) 60°. (*viii*) 60°. (*ix*) 60°. (*x*) 45° এবং 30°.
6. $A=52\frac{1}{2}°$, $B=7\frac{1}{2}°$. **7.** $\theta=50°$, $\phi=10°$, **9.** (*i*) $A=60°$, (*ii*) $A=45°$, (*iii*) $A=60°$, (*iv*) $A=60°$.

প্রশ্নমালা 5

1. 100 মিটার। **2.** 519·6 ফুট (প্রায়) **3.** $20\sqrt{3}$ ফুট। **4.** 45°.
5. $20\sqrt{3}$ ফুট। **6.** $25\sqrt{3}$ ফুট। **7.** 57·73 মিটার (প্রায়)।
8. $20\sqrt{3}$ মিটার। **9.** 136·6 ফুট (প্রায়)। **10.** $15\sqrt{3}$ ফুট।
11. 68·3 ফু. (প্রায়)। **12.** 102·46 ফু. (প্রায়)। **13.** 136·6 ফু. (প্রায়)।
14. 30 ফুট। **15.** 118·3 ফুট (প্রায়)। **16.** 236·6 ফুট (প্রায়)।
17. 21·96 ফু. (প্রায়)। **18.** 1183 ফুট। **19.** 41·4 ফুট (প্রায়)।
20. $60\sqrt{3}$ ফুট। **21.** $10\sqrt{3}$ ফুট, প্রথম খুঁটি হইতে 10 ফুট।
22. $30\sqrt{2}$ ফু., $60\sqrt{2}$. ফু. **23.** 148·04 ফুট (প্রায়)। **24.** 1 : 3.
25. 126·8 ফুট। **26.** (*a*) $880(\sqrt{3}+1)$ গজ, (*b*) $880(\sqrt{3}-1)$ গজ।
27. 528 গজ। **28.** 440 গজ। **29.** $50\sqrt{6}$ গজ।

পরিশিষ্ট

বিষয়মুখী প্রশ্নাবলী (Objective Questions)

(জ্যামিতি ও পরিমিতি)

1. কতগুলি ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে (*i*) 2 সে. মি., 5 সে. মি., 8 সে. মি. (*ii*) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 9 সে. মি. (*iii*) 4 সে. মি., 3 সে. মি., 5 সে. মি. (*iv*) 15 সে. মি., 10 সে. মি., 3 সে. মি. হইলে, ইহাদের কোন্ কোন্‌টি দ্বারা ত্রিভুজ গঠন সম্ভব এবং কেন সম্ভব বল।

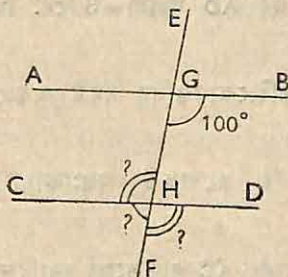
2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ এবং $\triangle ABC = \triangle DEF$-এর মধ্যে তফাৎ কি ?

3. যদি $\angle ABC \cong \angle DEF$ হয় এবং $\angle ABC \cong ACB$ হয়, তবে $m\angle ACB = m\angle DEF$ ঠিক্ না বেঠিক্ ?

4. একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত হইলে এবং সন্নিহিত কোণের একটি 30° হইলে, অপরটি কত ?

5. $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর পরস্পরকে O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $m\angle AOD = 40°$ হয়, তবে অপর কোণগুলির মান কত ?

6. যদি ত্রিভুজের বহিঃকোণের বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের প্রত্যেকের মান 50° করিয়া হয়, তবে দেখাও বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক অন্তঃকোণদ্বয় সংলগ্ন বাহুর সমান্তরাল।

7. (*i*) $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$-কে যথাক্রমে G ও H-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $m\angle BGF = 100°$ হয়, তবে "?" চিহ্নিত কোণগুলির মান কত ?

(*ii*) উপরোক্ত চিত্রে, $\angle BGH + \angle CHG = (4x + 10)$ ডিগ্রী এবং $\angle AGH + \angle DHG = 3x$ ডিগ্রী হইলে, G এবং H-বিন্দুতে অবস্থিত প্রত্যেক কোণের মান নির্ণয় কর।

8. শূন্যস্থান পূর্ণ কর :—

(*i*) দুইটি সন্নিহিত কোণের মান 180° হইলে, বহিঃস্থ বাহুদ্বয় — — হইবে।

(*ii*) পঞ্চভুজের বাহুগুলিকে পরপর একইক্রমে বর্ধিত করিলে, বহিঃকোণগুলির মান সমষ্টি — ডিগ্রী হইবে।

(*iii*) কোন সুষম ষড়ভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের মান — ডিগ্রী।

9. দেখাও যে, পঞ্চভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি অষ্টভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির অর্ধেক।

10. যদি কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 8 সমকোণ হয়, তবে ঐ বহুভুজটি কত বাহুবিশিষ্ট হইবে ?

11. শুদ্ধ করিয়া লিখ :—

(*i*) একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের তিন বাহুর সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

(*ii*) একটি ত্রিভুজের তিন কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের তিন কোণের সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

(*iii*) দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি বাহু এবং একটি কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুই বাহু ও একটি কোণের সহিত সর্বসম হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

12. ΔABC-র $m\angle A = 40^\circ$, $\angle B$ ও $\angle C$-র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, দেখাও যে, $m\angle BOC = 110^\circ$.

13. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AD}$ মধ্যমা $= 3$ সে. মি. হইলে, দেখাও যে, $\overline{BE}$ মধ্যমা $+$ $\overline{CF}$ মধ্যমা $= 2\overline{AD}$.

14. একটি বহুভুজের বহিঃকোণগুলির সমষ্টি অন্তঃকোণগুলির সমষ্টির $\frac{2}{5}$; বহুভুজটির বাহুর সংখ্যা কত ?

15. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ 156° ; বহুভুজটির বাহু-সংখ্যা কত ?

16. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\overline{AC}$-অতিভুজের মধ্যবিন্দু D. $\overline{AC} = 5$ মি. হইলে $\overline{BD} =$ কত ?

17. কি সর্তে একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক হইতে পারে ?

18. বর্গক্ষেত্র ও রম্বসের পার্থক্য কি ? সাদৃশ্যই বা কি ?

19. শুদ্ধ করিয়া লিখ :—

(*i*) একটি চতুর্ভুজের সর্বাধিক চারিটি কর্ণ থাকিতে পারে (*ii*) একটি ত্রিভুজের সর্বাধিক দুইটি মধ্যমা থাকিতে পারে (*iii*) একটি ট্রাপিজিয়ামের বিপরীত দুই দুইটি বাহু পরস্পর সমান্তরাল। (*iv*) আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুগুলি পরস্পর সর্বসম হইলে, উহাকে রম্বস বলে।

20. চাঁদার সাহায্য ব্যতিরেকে একটি 30° কোণ অঙ্কিত কর।

21. একটি সামান্তরিকের একটি কোণের মান 80° হইলে, উহার প্রত্যেকটি কোণের মান নির্ণয় কর।

22. সামান্তরিকের একটি কোণ 90° হইলে, দেখাও যে, উহা একটি আয়তক্ষেত্র।

23. একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 10 সে. মি. এবং অন্তর 2 সে. মি. হইলে, প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

24. ΔABC-র $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F, D এবং E. ΔBEF-র ক্ষেত্রফল 16 ব. মি. হইলে, ΔABC-র ক্ষেত্রফল কত ?

25. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ও $\overline{DA}$-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G এবং H. যদি $\overline{HE} = 5$ সে. মি., $\overline{EF} = 6$ সে. মি. হয়, তবে $\overline{AC} + \overline{BD} =$ কত ?

26. কোন ত্রিভুজের ভূমি 4 মিটার, উচ্চতা 3 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

27. উপরোক্ত ত্রিভুজের সমান ভূমি-বিশিষ্ট এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত ?

28. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 মিটার ও 6 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

29. একটি সমবাহু ত্রিভুজকে উহার ঘূর্ণন কেন্দ্রের চারিদিকে কমপক্ষে—— ডিগ্রীতে ঘুরাইলে, প্রতিসম চিত্র পাওয়া যাইবে (শূন্যস্থান পূর্ণ কর)

30. বর্ধিতকরণ উৎপাদক কাহাকে বলে ? কোন ত্রিভুজের সদৃশ এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যাহার বর্ধিতকরণ উৎপাদক $-\frac{1}{3}$.

31. শূন্যস্থান পূর্ণ কর :— যদি বর্ধিতকরণ উৎপাদক ধনরাশি হয়, তবে প্রতিবিম্ব বর্ধিতকরণ কেন্দ্রের — দিকে এবং ঋণরাশি হইলে, — দিকে অবস্থিত হইবে।

32. দুইটি সামতলিক সদৃশ আয়তাকার আকৃতি দেওয়া আছে। দ্বিতীয়টির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথমটির দুইগুণ হইলে ; উহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত ?

33. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $1:4$ হইলে, ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত হইবে ?

34. ΔABC-তে $DE \| BC$. যদি $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$ এবং $\overline{AD} = 6$ সে. মি. হয়, তবে $\overline{DB} =$ কত ?

35. ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র, লম্ব-বিন্দু এবং ভর-কেন্দ্র একই বিন্দুতে অবস্থিত হইলে, ঐ ত্রিভুজটি একটি সমবাহু/সমদ্বিবাহু/বিষমবাহু/ সমকোণী ত্রিভুজ হইবে (যথাস্থানে "√" চিহ্ন দাও)।

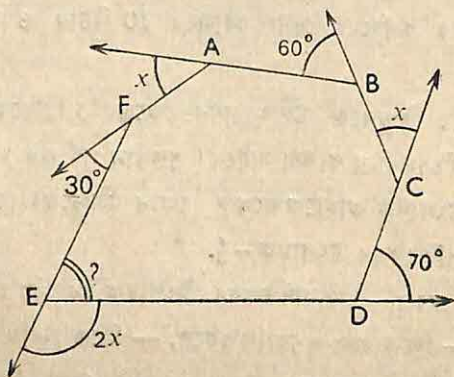
36. নিম্নে সেন্টিমিটারে কতকগুলি ত্রিভুজের বাহুত্রয় দেওয়া আছে। ইহাদের মধ্যে কোন্ কোন্টি সমকোণী ত্রিভুজ "√"-চিহ্ন দ্বারা দেখাও :—

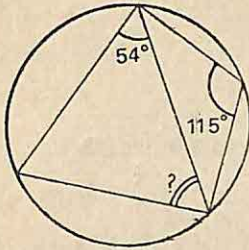
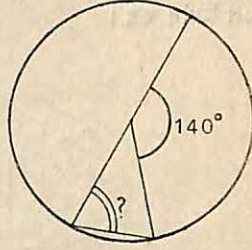
(*i*) 5, 7, 9 (*ii*) 3, 4, 5 (*iii*) 5, 8, 12 (*iv*) 5, 12, 13

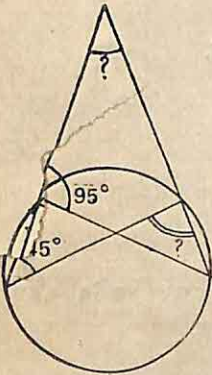
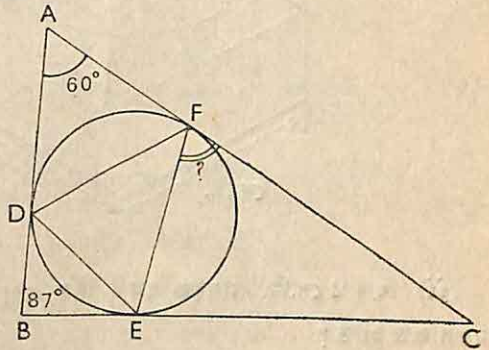
37. একটি সুষম বহুভুজের কোন অন্তঃকোণ বহিঃকোণ অপেক্ষা $120°$ অধিক হইলে, ঐ বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত ?

38. কোন বৃত্তের ব্যাস 26 সে.মি. এবং ঐ ব্যাসের সহিত সমান্তরাল দুইটি জ্যা-এর প্রত্যেকে 10 সে.মি. হইলে, সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত ?

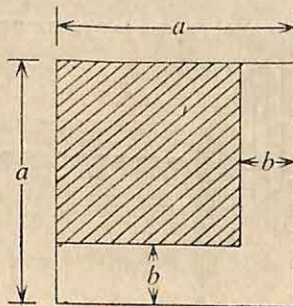
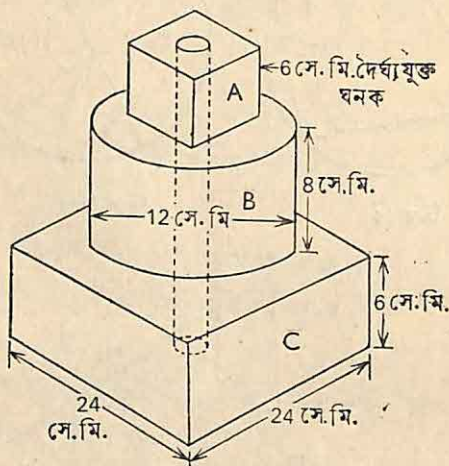
39. 6 সে.মি. দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি জ্যা বৃত্তের পরিধিতে $30°$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করিলে, বৃত্তের ব্যাস কত হইবে ?

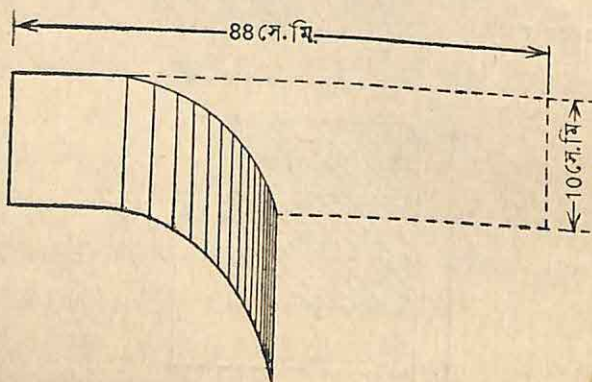
40. পার্শ্ববর্তী চিত্রে A, C এবং E-বিন্দুস্থিত বহিঃকোণগুলি যথাক্রমে x, x এবং

$2x$ হইলে, "?" চিহ্নিত কোণটি কত ডিগ্রী ?

41. নিম্নের চিত্রে প্রশ্নচিহ্নিত (?) কোণগুলির মান কত ?

চিত্র (i)

চিত্র (ii)

চিত্র (iii)

চিত্র (iv)

42. (i) পার্শ্বস্থ চিত্রের "শেড্" দেওয়া অংশটুকুর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ii) যদি $a=7$ সে. মি., $b=2$ সে. মি. হয়, তবে "শেড্"-হীন অংশটুকুর ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

43. পার্শ্বের চিত্র হইতে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে (*i*) (A), (B) ও (C) অক্ষরযুক্ত অংশগুলির ঘনফল নির্ণয় কর।

(*ii*) যদি 2 সে.মি. ব্যাসযুক্ত একটি ছিদ্র বরাবর থাকিত, তবে বস্তুটির সমগ্র ঘনফল কত হইত ?

44. 88 সে.মি. × 10 সে.মি. আয়তাকৃতি কাগজকে পাকাইয়া একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ প্রস্তুত করিলে, উহার দুই ফাঁকা প্রান্ত কাগজ দিয়া ঢাকিতে আর কতটুকু কাগজের প্রয়োজন হইবে ?

(ত্রিকোণমিতি)

শূন্যস্থান পূরণ কর :—

1. $90^\circ =$ — গ্রেড $=$ — রেডিয়ান।

2. $\frac{16}{10}$ সমকোণ $=$ — রেডিয়ান।

3. $\frac{7\pi^c}{6} =$ — গ্রেড — মিনিট — সেকেণ্ড।

4. $1^c =$ — ডিগ্রী — মিনিট — সেকেণ্ড।

5. $1^c =$ — সমকোণ।

6. $\cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, θ-এর মান কত ?

7. A-এর মান কত হইলে, $\sin A = \cos A$ হইবে ?

8. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একবাহুর অনুপাত $5:4$ হইলে, tan-এর সূক্ষ্মকোণের মান কত ?

9. A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan A = \cot 2A$ হইলে, A-এর মান কত ?

10. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2A\right) = 1$ হইলে, A-এর মান কত ?

11. শুদ্ধটিতে "$\sqrt{}$"-চিহ্ন দাও :

(i) $\sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{1}{2}/7/1/0.$

(ii) $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{1}{\sqrt{2}}/0/2/1.$

(iii) $\cot 60^\circ = \sqrt{3}/\frac{1}{\sqrt{3}}/4/0/1.$

(iv) $\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}/\frac{1}{2}/2/\sqrt{2}.$

12. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\frac{\pi^c}{4}$ এবং 25^g হইলে, তৃতীয়টির মান ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

13. $\sin\theta < 1$ হইলে, θ-এর বিপরীত বাহু ও অতিভুজের সম্পর্ক কিরূপ হইবে ?

14. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর একটি সূক্ষ্মকোণের দ্বিগুন হইলে, কোণত্রয়কে রেডিয়ান পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

আধুনিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি (X)

শুদ্ধিপত্র

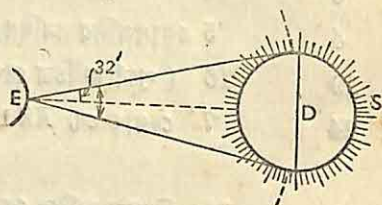
(জ্যামিতি)

পৃষ্ঠা	লাইন	আছে	হইবে
8	2	(চিত্র 11)	(যুক্তিমূলক পদ্ধতি, চিত্র 11)
3	14	(চিত্র 17)	(চিত্র 17, পরপৃষ্ঠায়)
4	5	কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি	কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়
19	16	(পূর্বোক্ত চিত্র দেখ)	(18 পৃঃ নীচের চিত্র আঁক)
24	7	দেখাও যে, $\overline{AX}\perp\overline{YZ}$	$\overline{AX}$, $\overline{YZ}$-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, $\overline{AX}\perp\overline{YZ}$.
26	10	বিন্দুতে অঙ্কিত কোণ	বিন্দুতে $\overline{AB}$ দ্বারা সৃষ্ট কোণ
31	8	$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ এবং	এই কথাটি বাদ যাবে
31	9	$\overline{AE}\cong\overline{BD}$	$\overline{AE}\parallel\overline{BD}$
86	3	$\overline{BD}$	$\overrightarrow{BD}$
8	27	বহির্দ্বিখণ্ডক, অন্তর্দ্বিখণ্ডক	বহিঃসমদ্বিখণ্ডক, অন্তঃসমদ্বিখন্দক
42	17	60	$60°$
56	10	S'_1	S_1
35	17	*উদা. 3	*উপপাদ্য
পরিশিষ্ট (i)	9	ACB	$\angle ACB$
„ (ii)	18	সমদ্বিখণ্ডক	অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক

69 ও 70-তে……দেওয়া আছে-তে $\overline{DE}>\overline{AB}$, $\overline{DF}>\overline{AC}$ ধরিয়া লও। পৃঃ 81, 82 উদা. 2, 3 এবং পৃঃ 82 অনু. 4, 6, 7 পাঠ্যসূচী বহির্ভূত।

(ত্রিকোণমিতি)

		আছে	হইবে
2 (চিত্র 3)	…	$\angle XOP$	$\angle XOP'$
3 (চিত্র 14)	…	$\angle XOP'$	$\angle XOP$
4 (চিত্র 16)	…	$\angle XOP'$	$\angle XOP$

পৃষ্ঠা	লাইন	আছে	হইবে
10	16	$\frac{51}{60}$	$\frac{51}{60}$ মি.
11	7	(iv)	(vi)
ঐ	8	$110^{q}30'$	$110^{g}30'$
12	7	$\frac{2.10-4}{n}$	$\frac{2.10-4}{10}$ সমকোণ
13	8	$\frac{2\pi}{676}$	$\frac{2\pi}{675}$
ঐ	…	(চিত্র দেওয়া নাই)	E, 32′, D, S, সমকোণ
19	21	P′N′O	∠P′N′O
29	1	কোণগুলিকে	অনুপাতগুলিকে
35	8, 9, 10	$(90-\theta)$	$(90°-\theta)$
উত্তরমালা : প্রশ্ন. 1…3		175^{g}	280^{g}
পরিশিষ্ট (i)…6		ACB	∠ACB
„ (vii)…10		tan-এর সূক্ষ্ম কোণের	সূক্ষ্মকোণের tan-এর

পৃঃ 5—6, 22—25, এবং 26 (অনু. 2·6, 2·7) পাঠ্যসূচী বহির্ভূত।

∠XOY, ∠YOX′, ∠X′OY′ এবং ∠Y′OX-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থপাদ বলে।

ত্রিকোণমিতি পৃঃ 4 বি. দ্র.-এর পর এই ছবি পড়।